Matemaatika Võistlus

17.02.2017

1. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Kas peab kehtima võrdus
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \rfloor}{a_n \lfloor x \rfloor^n + a_{n-1}\lfloor x \rfloor^{n-1} + \cdots + a_1 \lfloor x \rfloor + a_0} = 1,$$
kui on teada,
   (a) et $a_0, a_1, \ldots, a_n > 0$;
   (b) või ainult et $a_n > 0$?

2. Tõesta, et reaalarvulise maatriksi
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$
determinant ei ole 0, kui $|a_1| > |a_2| + |a_3|$, $|b_2| > |b_1| + |b_3|$ ja $|c_3| > |c_1| + |c_2|$.

3. Olgu mittekonstantne funktsioon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$, kusjuures $f(a) = f(b) = 0$. Tõesta, et leidub $\xi \in [a, b]$ nii, et
$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx.$$

4. Tähistame
$$t_{\alpha,n} = \sqrt{2^{\alpha^1} + \sqrt{2^{\alpha^2} + \cdots + \sqrt{2^{\alpha^n}}}}.$$
Milliste $\alpha \geq 0$ korral jada $(t_{\alpha,n})_{n=1}^{\infty}$ koondub?

5. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Tähistame
$$A_{n,i} = \begin{pmatrix} 1 & i & i^2 & \ldots & i^n \\ i & i^2 & i^3 & \ldots & i^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ i^n & i^{n+1} & i^{n+2} & \ldots & i^{2n} \end{pmatrix}.$$
Arvuta
$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} A_{n,i} \right|.$$

Lahendused

1. Tähistagu P käsitletud polünoomi.

   (a) Fikseeritud $x > 1$ korral $P(x) \geq P(\lfloor x \rfloor) \geq P(x-1) > 0$. Seega ka
   $$\frac{P(x)-1}{P(x)} \leq \frac{\lfloor P(x) \rfloor}{P(\lfloor x \rfloor)} \leq \frac{P(x)}{P(x-1)}.$$
   Kuna selle võrratuse nii vasak (sest $P(x) \to \infty$), kui ka parem pool, sest
   $$\frac{P(x)}{P(x-1)} \sim \frac{a_n x^n}{a^n (x-1)^n} \sim \frac{x^n}{x^n},$$
   koonduvad üheks, siis sama teeb ka keskmine osa.

   (b) Paneme tähele, et $P(\lfloor x \rfloor) \sim a_n \lfloor x \rfloor$ ja toimime samamoodi nagu osas a).

2. Oletame, et ta on 0. Siis veerud on lineaarselt sõltuvad. Vaatleme juhtumit, kus esimese veeru juures on kordaja 0. Siis $\lambda b_2 + \mu b_3 = 0$, kust $|\mu| > |\lambda|$. Samas aga $\lambda c_2 + \mu c_3 = 0$, kust $|\lambda| > |\mu|$, vastuolu. Samamoodi võime näidata, et teised kordajad on nullist erinevad. Seega võime eeldada, et kordajad $\eta, \lambda, \mu \neq 0$. Oletame, et $|\eta| \geq |\lambda| \geq |\mu|$. Kuna $\eta a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 = 0$, siis $|a_1| \leq |a_2| \frac{|\lambda|}{|\eta|} + |a_3| \frac{|\mu|}{|\eta|} \leq |a_2| + |a_3|$, mis on vastuolu. Samamoodi saab näidata, et vastolu tekib ka teiste võimalike järjestuste korral.

3. Tähistame $M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$. Paneme tähele, et $x \in (a,b)$ korral leidub $\xi \in (a,x)$ nii, et
   $$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \leq M(x-a)$$
   ja leidub $\eta \in (x,b)$ nii, et
   $$-f(x) = f(b) - f(x) = f'(\eta)(b-x)$$
   ehk
   $$f(x) = -f'(\eta)(b-x) \leq M(b-x).$$
   Vaatleme funktsiooni g, mis on defineeritud võrdusega $g(x) = M(x-a)$, kui $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ ja võrdusega $g(x) = M(b-x)$, kui $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$. Ta on pidev lõigus $[a,b]$, aga ei ole diferentseeruv punktis $\frac{a+b}{2}$. Seega $f \neq g$. Samas teame, et $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Seega nende integraalide vahel peab olema range võrratus. Nüüd
   $$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx \leq M\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^a (b-x)dx\right) = M\frac{(b-a)^2}{4},$$
   mis ongi väide, kuna maksimum realiseerub.

4. Selge, et $(t_{\alpha,n})$ on kasvav jada iga $\alpha \geq 0$ korral. Induktsiooniga on lihtne näha, et $t_{0,n} < 2$. Seega jada $(t_{0,n})$ koondub. Nüüd paneme tähele, et $t_{2,n} = 2t_{0,n}$, seega jada $(t_{\alpha,n})$ koondub kõigi $\alpha \leq 2$ korral.

   Teiselt poolt näeme, et

$$t_{\alpha,n} > (2^{\alpha^n})^{\frac{1}{2^n}} = 2^{(\frac{\alpha}{2})^n} \to_n \infty,$$

   kui $\alpha > 2$. Vastus on $0 \leq \alpha \leq 2$.

5. Paneme tähele, et

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_{n,i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & (n+1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & (n+1)^n \end{pmatrix}^T,$$

   kusjuures need kordajad on Vandermondi maatriksid, mille determinandid on

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j - i) = \prod_{i=2}^{n} i^{n+1-i} = \prod_{i=1}^{n} i!.$$

   Vastus on seega $(\prod_{i=1}^{n} i!)^2$.