Matemaatika Võistlus

31.03.2016

1. Kas leidub funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille korral eksisteerivad ühepoolsed tuletised
$$f'_+(0) := \lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \in \mathbb{R}$$
ja
$$f'_-(0) := \lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \in \mathbb{R},$$
kusjuures funktsioonid f, f^2 ja f^3 ei ole diferentseeruvad punktis 0, aga f^4 ja f^5 on? (Siin $f^n(x) = (f(x))^n$.)

2. Arvuta
$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{2016}.$$

3. Rahuldagu funktsioon $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ kõikide positiivsete x ja y korral tingimusi
$$\lim_{n \to \infty} \frac{g_n(x)}{g_{n+1}(x)} = 2$$
ja
$$\lim_{n \to \infty} \frac{g_n(x)}{g_n(y)} \in (0, \infty),$$
kus $g_1(x) = g(x)$ ja $g_{n+1}(x) = g(g_n(x))$, $n \geq 1$. Tõesta, et leidub funktsioon $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ nii, et iga $x > 0$ korral
$$2f(g(x)) = f(x).$$

4. Ruutmaatriksite X, A ja S korral kehtivad võrdused $S^2 = 0$ ja
$$X + SX + XS = A.$$
Väljenda X maatriksite S ja A kaudu.

Lahendused

1. Esiteks paneme tähele, et $f(h) \to f(0)$ kui $h \to \pm 0$, aga $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ (sest f pole diferentseeruv). Fikseerime täisarvu $k \geq 2$. Siis protsessis $h \to \pm 0$ saame

   $$\frac{f^k(h) - f^k(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h}(f(h)^{k-1} + f(h)^{k-2}f(0) + \cdots + f(0)^{k-1}) \to kf'_\pm(0)f(0)^{k-1}.$$

   Siit on selge, et f^k on diferentseeruv parajasti siis, kui $f(0) = 0$.

2. Paneme tähele, et $x,\ y \in \mathbb{R}$ korral

   $$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix},$$

   kust

   $$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{2016} = \begin{pmatrix} \cos(2016x) & -\sin(2016x) \\ \sin(2016x) & \cos(2016x) \end{pmatrix}.$$

   Märkus. Tegelikult maatriksite ringi $Mat_2(\mathbb{R})$ alamring

   $$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   on isomorfne kompleksarvude korpusega $\mathbb{C}$. Selle isomorfismi suhtes

   $$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \sim \cos x + i \sin x = e^{ix}$$

   ja ülesanne taandub võrdusele $(e^{ix})^{2016} = e^{i \cdot 2016x}$.

3. Fikseerime suvalise $y \in (0, \infty)$ ja defineerime

   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{g_n(x)}{g_n(y)}.$$

   Siis

   $$2f(g(x)) = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(y)} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \lim_{n\to\infty} \frac{g_n(x)}{g_n(y)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot f(x) = f(x).$$

   Märkus. See on Koenigs'i algoritm Schröderi funktsionaalvõrrandi $f(g(x)) = sf(x)$ lahendi leidmiseks.

4. Korrutades võrrandit maatriksiga X vasakult, paremalt ja mõlemalt poolt saame vastavalt $SX + SXS = SA$, $XS + SXS = AS$ ja $SXS = SAS$, kust

   $$X = A - SX - XS = A - SA - AS + 2SAS.$$