Matemaatikavõistlus

05.04.2015

1. Olgu P täisarvuliste kordajatega kuuppolünoom, kusjuures $P(k)$ jagub 5-ga iga täisarvu k korral. Tõestage, et polünoomi P kõik kordajad jaguvad 5-ga.

2. Maatriksi $X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ ja positiivse täisarvu n korral tähistame $\alpha_n(X) = E + X + X^2 + \cdots + X^n$. Milliste positiivsete täisarvude n korral kehtib lause
$$\forall X, Y \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \qquad XY = YX \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n(X)\alpha_n(Y) = \alpha_n(Y)\alpha_n(X)?$$

3. Olgu $m > 0$. Olgu funktsioon $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ poollõigus $[0,\infty)$ pidev ning vahemikus $(0,\infty)$ pidevalt diferentseeruv, kusjuures kõigi $x \in (0,\infty)$ korral kehtivad võrratused
$$\mathrm{e}^{\frac{2x}{m}} f(x)f'(x) \geqslant m$$
ja
$$|f(x)| \leqslant m.$$
Tõestage, et $f(0) = 0$ ning eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Leidke kõik võimalused, millega antud piirväärtus võib võrduda.

Lahendused.

1. Polünoom on $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Valides $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ ja $x = 2$, saame, et

$$\begin{aligned} &5 \mid d, \\ &5 \mid a + b + c + d, \\ &5 \mid -a + b - c + d, \\ &5 \mid 8a + 4b + 2c + d. \end{aligned}$$

Jaguvusseose aditiivsuse omadus ($5 \mid u, v \Rightarrow 5 \mid u + v$) annab, et $5 \mid 2(b + d)$, millest $5 \mid b + d$, sest 5 ja 2 on ühistegurita. Et $5 \mid d$, siis $5 \mid b$. Nüüd $5 \mid a + c$ ja samas $5 \mid 8a + 2c$, millest $5 \mid 4a + c$. Järelikult $5 \mid 3a$, millest $5 \mid a$ ja seetõttu $5 \mid c$.

2. *Lahendus 1.* Juhul $n = 1$ on muidugi need võrdused samaväärsed. Näitame, et juhul $n > 1$ nii ei ole.

Olgu $n > 1$.

Olgu $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ ning $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Siis

$$\begin{aligned} XY - YX &= \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_n(X) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + x + \ldots + x^n \end{pmatrix}, \\ \alpha_n(Y) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seega, tähistades $T_n = 1 + x + \ldots + x^n$, leiame, et

$$\begin{aligned} \alpha_n(X)\alpha_n(Y) - \alpha_n(Y)\alpha_n(X) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & T_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & T_n \\ 0 & T_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (1 - T_{2k}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Valides x nii, et ta on polünoomi $T_n(x) - 1 = x + \ldots + x^n$ nullist erinev juur, näeme, et $XY - YX \neq 0$, ent $\alpha_n(X)\alpha_n(Y) - \alpha_n(Y)\alpha_n(X) = 0$.

Lahendus 2. Kontranäite võime valida ka teisiti. Olgu $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Maatriksi Y koostame nii, et $Y^{n+1} = E$. Selleks olgu $Y = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}$, kus $\varepsilon(n + 1) = 2\pi$. Nüüd $\alpha_n(Y)(Y - E) = Y^{n+1} - E = 0$, samas $\det(Y - E) = 2 - 2\cos\varepsilon = \left(2 \sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \neq 0$. Järelikult $\alpha_n(Y) = 0$, mistõttu $\alpha_n(X)\alpha_n(Y) - \alpha_n(Y)\alpha_n(X) = 0$. Samas $XY = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja $YX = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & 0 \\ -\sin\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, mistõttu $XY \neq YX$.

Märkus. Lahendus 2 näitab, et ülesande väide kehtib tegelikult ka maatriksite ringi $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ jaoks.

3. Antud võrratus $f(x)f'(x) \geqslant me^{-\frac{2x}{m}}$ on samaväärne võrratusega $(f(x)^2)' \geqslant 2me^{-\frac{2x}{m}}$. Näeme, et $(f(x)^2)' > 0$, kui $x \in (0, \infty)$, järelikult on funktsioon f^2, aga siis ka $|f|$ rangelt kasvav poollõigus $[0, \infty)$. Teiselt poolt on $|f|$ antud poollõigus tõkestatud: $|f(x)| \leqslant m$. Monotoonsusprintsiibi põhjal saame, et leidub lõplik piirväärtus $A := \lim\limits_{x\to\infty} |f(x)|$.

Newton–Leibnizi valemist (funktsiooni $(f(x)^2)'$ kohta, mis on suvalise $\varepsilon > 0$ korral lõigus $[\varepsilon, x]$ pidev) järeldame, et

$$f(x)^2 = f(\varepsilon)^2 + \int_\varepsilon^x (f(t)^2)'\,\mathrm{d}t \geqslant f(\varepsilon)^2 + \int_\varepsilon^x 2m\mathrm{e}^{-\frac{2t}{m}}\,\mathrm{d}t = f(\varepsilon)^2 + m^2\mathrm{e}^{-\frac{2\varepsilon}{m}} - m^2\mathrm{e}^{-\frac{2x}{m}}.$$

Läheme võrratuses mõlemal pool piirile $\varepsilon \to 0+$. Kuna f on pidev punktis 0, saame, et

$$f(x)^2 \geqslant f(0)^2 + m^2 - m^2\mathrm{e}^{-\frac{2x}{m}}.$$

Minnes nüüd piirile $x \to \infty$, näeme, et $A^2 \geqslant f(0)^2 + m^2$. Teiselt poolt aga nõude $|f(x)| \leqslant m$ tõttu $A^2 \leqslant m^2$. Järelikult tuleb ainsa võimalusena kõne alla, et $f(0) = 0$ ja $A = m$.

Näitame järgnevalt, et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ eksisteerib ning tema ainsad võimalikud väärtused on m ja $-m$.

Kuna $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = m$, siis leidub arv $D > 0$ nii, et kui $x > D$, siis $f(x) > \frac{m}{2} \vee f(x) < -\frac{m}{2}$.

Paneme tähele, et leiab aset täpselt üks teineteist välistavatest võimalustest: $x > D \Rightarrow f(x) > \frac{m}{2}$ ning $x > D \Rightarrow f(x) < -\frac{m}{2}$. Tõepoolest, kui leiduksid punktid $x_1, x_2 \in (D, \infty)$ nii, et $f(x_1) > \frac{m}{2}$ ja $f(x_2) < -\frac{m}{2}$, siis funktsiooni f pidevuse ja Bolzano–Cauchy teoreemi tõttu leiduks punkt x_3 vahemikust otspunktidega x_1 ja x_2 nii, et $f(x_3) = 0$, mis on võimatu.

Niisiis, kogu vahemikus (D, ∞) kehtib kas $f = |f|$ või $f = -|f|$, mistõttu otsitav piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ eksisteerib ja on kas m või $-m$.

Märgime lõpuks, et mõlemad variandid võivad realiseeruda. Tõepoolest, funktsioonid $f(x) = \pm m\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\frac{2x}{m}}}$ rahuldavad ülesande nõudeid, kuna $f(x)^2 = m^2 - m^2\mathrm{e}^{-\frac{2x}{m}}$ ning selle tuletis on $2m\mathrm{e}^{\frac{-2x}{m}}$.