Tartu Ülikooli matemaatika olümpiaad

12.05.2017

1. Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sellised, et $|\alpha| = |\beta| = 1$ ja $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Tõesta, et $\beta = \mathrm{i}\alpha$ või $\beta = -\mathrm{i}\alpha$.
2. Kumb on suurem, π^3 või 3^π?
3. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_{4,2}(\mathbb{R})$ ja $B \in \mathrm{Mat}_{2,4}(\mathbb{R})$ nii, et
$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Leia maatriks BA.
4. Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid P, mille korral
$$P(x)^2 - P(y)^2 = P(x+y)P(x-y)$$
kõikide $x, y \in \mathbb{R}$ jaoks.
5. Olgu G rühm, mis on moodustatud fikseeritud elementide $a, b \in G$ kõikvõimalikest korrutistest, kusjuures $aba = b^3$ ja $b^5 = 1$. Tõesta, et G on Abeli rühm.
6. Milliste $x > 0$ korral koondub rida
$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right)?$$

Lahendused

1. Võtame võrduse $|\alpha-\beta|=\sqrt{2}$ pooled ruutu, saame, et
$$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=2,$$
seega
$$\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2,$$
millest
$$\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}=0.$$
Seega
$$\alpha^2+\beta^2=\alpha^2\beta\overline{\beta}+\beta^2\alpha\overline{\alpha}=\alpha\beta(\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha})=0,$$
millest järeldubki, et $\alpha^2=-\beta^2$ ja seega $\alpha\in\{\pm\mathrm{i}\beta\}$.

   Lahendus 2. Paneme tähele, et komplekstasandi punktid α, β ja nullpunkt moodustavad võrdhaarse kolmnurga, külgedega 1, 1 ja $\sqrt{2}$. Seega on tipunurk 90° ning järelikult on üks kompleksarv saadav teisest korrutades kompleksarvuga $\pm(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})=\pm\mathrm{i}$.

2. Olgu $f(x)=3^x x^{-3}$, kus $x>0$. Siis
$$f'(x)=\frac{3^x(x\ln 3-3)}{x^4}>0,$$
kui $x>\frac{3}{\ln 3}$. Kuna $\frac{3}{\ln 3}<3<\pi$, siis $f(3)=1<f(\pi)=\frac{3^\pi}{\pi^3}$ ehk $\pi^3<3^\pi$.

   Lahendus 2. Samasugust arutelu saab teha ka funktsiooniga $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, mis on kahanev $x>e$ korral, või ka teistega, nagu $g(x)=x^3-3^x$ ja $h(x)=(3+x)^{\pi-x}$.

3. Vaadeldes maatriksit A kui kahest 2×2 plokist koosnevat veergu $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ning B samamoodi kui rida maatriksitest R ja S, kehtib $PR=3E$ ja $QS=-2E$. Seega $\frac{1}{3}P$ ja R on üksteise pöördmaatriksid ja $\frac{1}{-2}Q$ ja S on üksteise pöördmaatriksid. Näeme, et $BA=RP+SQ=3E-2E=E$.

4. Võttes $y=x-T$, saame
$$P^2(x)=P^2(x-T)=P(2x-T)P(T). \tag{1}$$
Kui T on polünoomi P juur, siis $P^2(x)=P^2(x-T)$, st P^2 on perioodiline perioodiga T. Paneme tähele, et (1) kehtib ka kõikide kompleksarvuliste x ja T korral, sest see on ekvivalentne mingisuguste kordajatevaheliste seostega.

   Seega polünoomi P iga kompleksne juur on polünoomi P^2 (kompleksne) periood. Aga mittekonstantsel polünoomil ei saa olla nullist erinevat perioodi, sest $|P^2(z)|\to\infty$, kui $|z|\to\infty$. Seega kas P on konstantne ja seega 0 või kõik teema juured on nullid ehk $P(x)=ax^n$. Siis
$$x^{2n}-y^{2n}=(x+y)^n(x-y)^n.$$

Pannes $x = 2$, $y = 1$, saame $4^n - 1 = 3^n$, kust $n = 1$. Seega $P(x) = ax$.

Lahendus 2. Võttes $x = y = 0$, saame $P(0) = 0$. Diferentseerime x järgi ja siis paneme $y = x$, saame

$$2P'(x)P(x) = P(2x)P'(0).$$

Kui $P'(0) = 0$, siis $P = 0$. Vastasel juhul vasakul on $(2n-1)$. astme polünoom, paremal aga n. astme polünoom, millest $n = 2n-1$ ehk $n = 1$. Seega $P(x) = ax$.

5. Piisab näidata, et $ab = ba$, see võimaldab suvaliste $x, y \in G$ korral saada $xy = yx$.

   Saame, et $b^{-1}ab = b^2a^{-1}$, mistõttu

$$\begin{aligned} b^{-2}ab^2 &= b^{-1}(b^{-1}ab)b = b^{-1}(b^2a^{-1})b = b^2(b^{-1}a^{-1}b) \\ &= b^2(b^{-1}ab)^{-1} = b^2(b^2a^{-1})^{-1} = b^2ab^{-2}. \end{aligned}$$

   Järelikult $ab^4 = b^4a$. Seega $ab = b^5ab = b(b^4a)b = b(ab^4)b = ba$.

6. Taylori valemist saame, et

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right) = \frac{(-1)^n}{n^x} - c_n,$$

   kus $c_n > 0$ ja $c_n \sim \frac{1}{2n^{2x}}$ protsessis $n \to \infty$. Kuna rida

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

   koondub Leibnizi tunnuse järgi, siis algse rea koondumine on samaväärne rea

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^{2x}}$$

   koonduvusega. Seega vastus on $x > \frac{1}{2}$.