Tartu Ülikooli matemaatikaolümpiaad

Tartu, 17.05.2024

1. Mitu korda on keskmiselt vaja visata ideaalset täringut (iga silmade arvu $1, 2, 3, 4, 5, 6$ saamise tõenäosus on $\frac{1}{6}$, sõltumata teistest visetest), kuni saadakse tulemuseks 6 silma?

2. Tõestage, et diferentsiaalvõrrandi

$$y' = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

iga lahend on tõkestatud funktsioon.

3. Tähistagu $\mathbb{R}[x]$ kõigi polünoomfunktsioonide $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulka. Igale polünoomfunktsioonile $p \in \mathbb{R}[x]$ olgu seatud vastavusse reaalarv $D(p)$ nii, et

   1) $D(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1 D(p_1) + \alpha_2 D(p_2)$,
   2) $D(p_1 p_2) = D(p_1) p_2(\frac{1}{2}) + p_1(\frac{1}{2}) D(p_2)$,

   kus $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$ ning $\alpha_1, \alpha \in \mathbb{R}$ on suvalised. (Kirjutis $p_1 p_2$ tähistab punktiviisi korrutist.)

   a) Tõestage, et $D(p) = Cp'(\frac{1}{2})$ (kus $C \in \mathbb{R}$).
   b) Asendame D definitsioonis polünoomfunktsioonide hulga $\mathbb{R}[x]$ hulgaga $C[0, 1]$ (pidevad funktsioonid $[0, 1] \to \mathbb{R}$). Tõestage, et nüüd $D(f) = 0$ iga $f \in C[0, 1]$ korral.

4. Olgu $a, b, c \in \mathbb{C}$. Tõestage, et a, b, c on komplekstasandil asuva (võib-olla kidunud) võrdkülgse kolmnurga tipud parajasti siis, kui

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab.$$

5. Tõestage, et igal lõplikul rühmal, mille elementide arv on vähemalt 3, leidub mittetriviaalne (st. samasusteisendusest erinev) automorfism.

   Märkus. Olgu G rühm tehte $*$ suhtes. Bijektsiooni $f\colon G \to G$, mille korral $f(x * y) = f(x) * f(y)$ iga $x, y \in G$ jaoks, nimetatakse rühma G *automorfismiks.*

6. Minač ja Willans on saanud järgmise valemi n-nda algarvu leidmiseks:

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1 + \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{(j-1)!+1}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor^{\frac{1}{n}} \right\rfloor .$$

Tõestage, et valem kehtib.

Märkus. Kirjutis $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x, st. täisarvu, mis rahuldab järgmisi võrratusi: $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Math Olympiad of University of Tartu

Tartu, 17.05.2024

1. What is the average number of times that an ideal dice (the probability of obtaining any of the values $1, 2, 3, 4, 5, 6$ is $\dfrac{1}{6}$ independently of other rolls) must be rolled until one obtains the value 6?

2. Prove that every solution of the differential equation

$$y' = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

is a bounded function.

3. Let us denote by $\mathbb{R}[x]$ the set of all polynomial functions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. For every polynomial function $p \in \mathbb{R}[x]$ let us denote a real number $D(p)$ such that

   1) $D(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1 D(p_1) + \alpha_2 D(p_2)$,
   2) $D(p_1 p_2) = D(p_1) p_2(\frac{1}{2}) + p_1(\frac{1}{2}) D(p_2)$,

   where $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$ and $\alpha_1, \alpha \in \mathbb{R}$ are arbitrary. (The expression $p_1 p_2$ denotes pointwise multiplication.)

   a) Prove that $D(p) = Cp'(\frac{1}{2})$ (where $C \in \mathbb{R}$).
   b) In the definition of D, let us replace the set $\mathbb{R}[x]$ by $C[0,1]$ (continuous functions $[0,1] \to \mathbb{R}$). Prove that now $D(f) = 0$ for every $f \in C[0,1]$.

4. Let $a, b, c \in \mathbb{C}$. Prove that a, b, c are vertices of a (possibly degenerate) equilateral triangle lying in the complex plane if and only if

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab.$$

5. Prove that for every finite group with at least 3 elements, there exists a non-trivial (i.e., different from identity) automorfism.

   Remark. Let G be a group with respect to the operation $*$. A bijection $f\colon G \to G$, for which $f(x * y) = f(x) * f(y)$ for every $x, y \in G$, is called an *automorfism* of G.

6. Minač and Willans have obtained the following formula for finding the n-th prime number:

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1 + \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{(j-1)!+1}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor^{\frac{1}{n}} \right\rfloor .$$

Prove that this formula holds.

Remark. The symbol $\lfloor x \rfloor$ denotes the largest integer not exceeding x, i.e., the integer satisfying the following inequalities: $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Tähistame lühiduse huvides $p = \dfrac{1}{6}$ ning $q = 1 - p$. Tulemuse „6 silma“ esmakordse tuleku tõenäosuste kohta saame järgneva tabeli:

Katsete arv	Katse tõenäosus
1	p
2	pq
3	pq^2
$\vdots$	$\vdots$

Katsete arvu keskväärtus m avaldub järgmiselt:

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot pq^{k-1}.$$

Selle rea summa leidmiseks on mitu võimalust, üks neist on astmeridade teooria kasutamine. Kuna astmerida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ võib tema koonduvusvahemikus $(-1, 1)$ liikmeti diferentseerida, siis

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Järelikult

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot pq^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Niisiis keskmine visete arv, et saada 6 silma, on $\dfrac{1}{p} = 6$ viset.

Lahendus 2. Koonduva rea summat

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot pq^{k-1} = p + 2pq + 3pq^2 + \dots$$

saab leida ka järgnevalt. Kuna

$$qm = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot pq^{k} = pq + 2pq^2 + \dots,$$

siis lahutamisel saame:

$$m - qm = p + pq + pq^2 + \ldots = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Järelikult $m = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p} = 6$.

2. Leidugu punkti (x_0, y_0) jaoks diferentseeruv funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + f(x)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ning $y_0 = f(x_0)$.

Paneme tähele, et tuletisfunktsioon f' on positiivne. Järelikult funktsioon f on rangelt kasvav. Newton–Leibnizi valemi kohaselt

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + f(t)^2}, \qquad x \neq x_0.$$

Nüüd

$$|f(x) - y_0| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + f(t)^2} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \pi.$$

Märkus 1. Ülesande lahendamise jaoks polnud üldse oluline, kas lahendikõveraid (iga punkti jaoks) leidub ja kas nad on üheselt määratud. Nendele küsimustele vastused on jaatavad. Vastavalt globaalsele Picard–Lindelöfi teoreemile iga konkreetse (x_0, y_0) korral leidub täpselt üks diferentseeruv funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + f(x)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ning $y_0 = f(x_0)$.

Globaalse Picard–Lindelöfi teoreemi saab sõnastada järgnevalt: *kui pidev funktsioon $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on teise argumendi järgi ühtlaselt Lipschitzi funktsioon (st. tõus on tõkestatud sama konstandiga kogu lähtehulga jaoks), siis leidub igal algväärtusülesandel $\{y'(x) = F(x, y(x));\ y_0 = y(x_0)\}$ üheselt määratud lahend $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.*

Meie juhtumil on $n = 1$ ja $F(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$, sealjuures

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = \frac{2|y|}{(1 + x^2 + y^2)^2} \leqslant \frac{2|y|}{(1 + y^2)^2} < 1, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Märkus 2. Kuna põhiliselt kasutatakse õpikutes Picard–Lindelöfi (Cauchy) teoreemi lokaalset varianti (näiteks mingis väikeses kinnises ristkülikus), siis skitseerime täielikkuse huvides siinkohal eelmises märkuses kaldkirjas toodud väite tõestuse. Olgu ühtlane Lipschitzi tõke L, see tähendab,

$$\|F(x,y_2) - F(x,y_1)\| \leqslant L\|y_2 - y_1\|, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Tähistame pidevate $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funktsioonide ruumis normi

$$|||y||| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2L|x|}\|y(x)\|$$

ning vaatleme funktsioonide ruumi $S = \{y \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\colon |||y||| < \infty\}$. Hulka S kuuluvad ka konstantsed funktsioonid. Tõestuse idee on näidata, et Picardi operaator $P\colon S \to S$,

$$(Py)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, y(t))\,\mathrm{d}t, \qquad y \in S, \quad x \in \mathbb{R},$$

on ahendav (ruumi S normis), ja rakendada Banachi püsipunkti printsiipi jadale $(y_0, P(y_0), P(P(y_0)), \ldots)$.

Ahendavus järeldub järgmisest võrratusest:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-2Lx}\|(P(y_2))(x) - (P(y_1))(x)\| \leqslant \\
&\quad\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-2L(x-t)} \cdot \mathrm{e}^{-2Lt} \cdot L \cdot \|y_2(t) - y_1(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \\
&\quad\leqslant L|||y_2 - y_1||| \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-2L(x-t)}\mathrm{d}t \leqslant \\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2L(x-x_0)})|||y_2 - y_1||| \leqslant \\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}|||y_2 - y_1|||.
\end{aligned}$$

3. Kõigepealt, valides $p_1 = p_2 = 1$, leiame punkti 2) põhjal, et $D(1) = 2D(1)$, millest $D(1) = 0$. Homogeensuse tõttu (punkt 1)) on kõigi konstantsete (polünoom)funktsioonide D-väärtus null.

   a) Lineaarsus (punkt 1)) võimaldab vastust saada üksikute monoomide kaupa. Tõestame matemaatilise induktsiooni abil, et

$$D(x^n) = nD(x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \tag{1}$$

Baasjuhul $n = 1$ pole midagi tõestada.

Kehtigu võrdus (1), kui n rollis on $n-1$. Valides $p_1 = x$ ja $p_2 = x^{n-1}$, saame, et

$$
\begin{aligned}
D(x^n) &= D(x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} D(x^{n-1}) = \\
&= D(x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (n-1) D(x) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \\
&= n D(x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},
\end{aligned}
$$

nagu vaja.

Tähistanud $D(x) = C$, olemegi saanud, et $D(p) = Cp'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Teiselt poolt, kontroll näitab, et $D(p) = Cp'\left(\frac{1}{2}\right)$ rahuldab tingimusi 1) ja 2).

b) Nüüd on $D\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ lineaarne operaator, kusjuures $D(fg) = D(f)g(\frac{1}{2}) + D(g)f(\frac{1}{2})$ suvaliste $f, g \in C[0,1]$ korral.

Paneme tähele, et kui funktsiooni $f \in C[0,1]$ jaoks kehtib, et $f(\frac{1}{2}) = 0$ ning $f \geqslant 0$, siis $D(f) = 0$. Tõepoolest, sellise funktsiooni korral saame, et

$$D(f) = D\left(\left(\sqrt{f}\right)^2\right) = 2D\left(\sqrt{f}\right) \cdot \sqrt{f(\tfrac{1}{2})} = 0.$$

See, et D on lineaarne ja et konstantse funktsiooni D-väärtus on 0, võimaldab üldisust kitsendamata eeldada, et $f(\frac{1}{2}) = 0$. Tõepoolest, kui nii ei ole, tähistame $\tilde{f}(x) = f(x) - f(\frac{1}{2})$ ning paneme tähele, et

$$D(\tilde{f}) = D(f - f(\tfrac{1}{2})) = D(f) - D(f(\tfrac{1}{2})) = D(f).$$

Olgu niisiis $f \in C[0,1]$ suvaline, eeldame üldisust kitsendamata ainult, et $f(\frac{1}{2}) = 0$. Jagame f kaheks osaks:

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \qquad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}, \qquad f = f_+ - f_-.$$

Funktsioonid f_+, f_- on samuti lõigus $[0,1]$ pidevad, sest absoluutväärtuse võtmine on pidev ja aritmeetilised tehted säilitavad pidevuse. Ent lisaks kehtivad omadused $f_+, f_- \geqslant 0$ ning $f_+(\frac{1}{2}) = f_-(\frac{1}{2}) = 0$. Niisiis

$$D(f) = D(f_+ - f_-) = D(f_+) - D(f_-) = 0.$$

4. *Lahendus 1.* Tähistame kompleksarvudele a, b, c vastavad punktid tasandil tähtedega A, B, C. Vaatame kõigepealt juhtu, kui A, B, C ei ole kollineaarsed.

Olgu kolmnurk ABC võrdkülgne, konkreetsuse mõttes vastupäeva orienteerituna. Nüüd

$$c - a = (b - a)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}, \qquad a - b = (c - b)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}.$$

Järelikult

$$(c - a)(c - b) = (a - b)(b - a),$$

mis on samaväärne tingimusega

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab.$$

Vastupidi, eeldame, et kehtib $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$ ehk $(c - a)(c - b) = (a - b)(b - a)$. Järelikult

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{a - b}{c - b} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

mingite r, θ korral. Niisiis

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|BA|}{|BC|} = r$$

ning

$$\angle BAC = \angle CBA = \pm\theta \pmod{2\pi}.$$

Alusnurkade võrdumine annab haarade võrdumise: $|AC| = |BC|$. Järelikult ABC on võrdkülgne.

Vaatame lõpuks juhtu, kui A, B, C on kollineaarsed. Tingimus $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$ ehk $(c - a)(c - b) = (a - b)(b - a)$ on invariantne nihete (kõigile arvudele konstandi liitmine) ja ümber nullpunkti toimuvate pöörete (kõiki arvusid korrutatakse mingi teguriga $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$) suhtes. Niisiis võime eeldada, et a, b, c on reaalarvud ja $a = 0$. Nüüd teiseneb tingimus kujule $c^2 + b^2 = bc$, mis kehtib parajasti siis, kui $c = b = 0$ (seda saab tõestada, vaadeldes tingimust $c^2 + b^2 = bc$ ruutvõrrandina c suhtes, või märgates, et see on samaväärne võrdusega $b^2 + c^2 + (c - b)^2 = 0$). Seega sel juhul antud tingimus on samaväärne sellega, et a, b, c on kidunud võrdkülgse kolmnurga (kokkulangevad) tipud.

Lahendus 2. Paneme tähele, et ülesande tingimus ei muutu nihete, pöörete ja skaleerimistega. Tõepoolest, olgu kõigist arvudest lahutatud $\omega \in \mathbb{C}$, siis uus tingimus on järgmine:

$$(a - \omega)^2 + (b - \omega)^2 + (c - \omega)^2 = (b - \omega)(c - \omega) + (c - \omega)(a - \omega) + (a - \omega)(b - \omega)$$

ehk

$$a^2+b^2+c^2-2\omega(a+b+c)+3\omega^2 = bc+ca+ab-2\omega(a+b+c)+3\omega^2$$

ehk

$$a^2+b^2+c^2 = bc+ca+ab.$$

Olgu nüüd kõiki arvusid korrutatud kompleksarvuga $re^{\mathrm{i}\varphi}$ (kus $r>0$, $\varphi\in\mathbb{R}$), siis selle ruut tuleb tegurina mõlemalt poolt ette ja taandub tegurina välja.

Niisiis on antud tingimuse kehtimiseks (üldisust kitsendamata) kaks võimalust:

(a) $a=0$, $b=1$. Nüüd jääb tingimus kujule $c^2+1=c$, mis on samaväärne sellega, et $c=\cos\frac{\pi}{3}\pm\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. On jäänud teha kindlaks vektorite $b-a, c-b, a-c$ vahelised nurgad või pikkused.

Arvutame:

$$\begin{aligned}
|b-a|^2 &= 1,\\
|c-b|^2 &= \left\langle -\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle = 1,\\
|a-c|^2 &= \left\langle -\frac{1}{2}\mp\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\mp\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle = 1.
\end{aligned}$$

Tegu on (mittekidunud) võrdkülgse kolmnurgaga.

(b) $a=b=0$. Nüüd on tingimus kujul $c^2=0$ ehk $c=0$. Tegu on kidunud (võrdkülgse) kolmnurgaga.

5. Olgu (lõplik) rühm $(G,*)$ esmalt mittekommutatiivne, siis $G\setminus\{a\colon \forall b\in G\, a*b=b*a\}\neq\emptyset$ on mittetühi. Valime sellest hulgast elemendi a ning koostame teisenduse $f(x)=a^{-1}*x*a$. Kuna mingi $x\in G$ korral $a*x\neq x*a$, siis $x\neq a^{-1}*x*a$, järelikult f pole samasusteisendus. Vahetu kontroll näitab, et f on G automorfism: $f(x)=f(y)$ annab, et $a^{-1}*x*a=a^{-1}*y*a$, millest $x=y$; fikseeritud elemendi y korral osutub, et $f(a*y*a^{-1})=y$, ja $f(x*y)=a^{-1}*x*y*a=(a^{-1}*x*a)*(a^{-1}*y*a)=f(x)*f(y)$.

   Järgnevalt vaatame Abeli rühmi. Olgu esiteks $G=\{e,a,a^2,\ldots,a^{m-1}\}$ (tsükliline rühm). Et $m>2$, saame valida n sellise, et $n>1$ ja n oleks m-ga ühistegurita. Nüüd $f(x)=x^n$ on otsitav automorfism, kuna seetõttu, et $\mathrm{SÜT}(m,n)=1$, kehtib mooduli m järgi võrdus $\{n,2n,3n,\ldots,(m-1)n\}=\{1,2,3,\ldots,m-1\}$ ja järelikult f on sürjektsioon lõplikul hulgal (seega bijektsioon).

Kui $(G, *)$ on suvaline lõplik Abeli rühm, siis vastavalt Abeli rühmade põhiteoreemile laguneb ta tsükliliste rühmade otsesummaks (vastavalt elementide arvu tegurdusele aritmeetika põhiteoreemi järgides). Kui kasvõi üks neist otseliidetavatest on vähemalt 3-elemendiline, saame automorfismi nii, et selles otseliidetavas kasutame eelmise lõigu teisendust ja mujal samasusteisendust. Kui kõik otseliidetavad on kahe-elemendilised, siis valime neist suvalised kaks ja permuteerime omavahel.

6. Wilsoni teoreemi kohaselt on täisarv $n > 1$ algarv parajasti siis, kui $n \mid (n-1)! + 1$. Järelikult

$$\left\lfloor \frac{(j-1)!+1}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right\rfloor = \begin{cases} 1, & \text{kui } j \text{ on algarv,} \\ 0, & \text{kui } j \text{ on kordarv.} \end{cases}$$

Niisiis on jäänud tõestada, et

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1+\pi(m)} \right\rfloor^{\frac{1}{n}} \right\rfloor,$$

kus $\pi(m)$ on arvu m mitte ületavate algarvude arv.

Paneme tähele, et

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1+\pi(m)} \right\rfloor^{\frac{1}{n}} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & \text{kui } \pi(m) \leqslant n-1, \\ 0, & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Tõepoolest,

$$\frac{n}{1+\pi(m)} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi(m) > n-1.$$

Teiselt poolt, näiteks Bernoulli võrratuse ($(1+x)^r \leqslant 1 + rx$, kui $0 \leqslant r \leqslant 1$ ja $x \geqslant -1$) kohaselt

$$\left\lfloor \frac{n}{1+\pi(m)} \right\rfloor^{\frac{1}{n}} \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{\frac{1}{n}} \leqslant 1 + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \cdot \frac{1}{n} < 1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n} < 2$$

Indeks m läbib väärtused 2-st 2^n-ni. Sealjuures,

$$\pi(m) \leqslant n-1 \quad \Leftrightarrow \quad m < p_n.$$

Niisiis, liidetav 1 saadakse $m = 2, 3, 4, \ldots, p_n - 1$ korral, kokku $p_n - 2$ korda. Järelikult

$$2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1+\pi(m)} \right\rfloor^{\frac{1}{n}} \right\rfloor = 2 + (p_n - 2) = p_n.$$