Tartu Ülikooli matemaatikaolümpiaad

Tartu, 19.05.2023

1. On teada, et
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
Leidke rea
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$
summa või tõestage, et see rida on hajuv.

2. Olgu A, B, C sõltumatud ühtlase jaotusega juhuslikud suurused väärtustega lõigust $[-N, N]$, kus N on suur reaalarv ($N \gg 4$).
   (a) Leidke tõenäosus, et $B^2-4C \geqslant 0$ (see tähendab, tõenäosus, et ruutvõrrandi $x^2 + Bx + C = 0$ lahendid on reaalsed). Tõestage, et selle tõenäosuse piirväärtus protsessis $N \to \infty$ leidub ning leidke see piirväärtus.
   (b) Leidke tõenäosus, et $B^2 - 4AC \geqslant 0$ (see tähendab, tõenäosus, et $A = 0$ või ruutvõrrandi $Ax^2 + Bx + C = 0$ lahendid on reaalsed). Tõestage, et selle tõenäosuse piirväärtus protsessis $N \to \infty$ leidub ning leidke see piirväärtus.

3. Olgu antud täisarvud $a_1, \ldots, a_{10}$ nii, et $1 \leqslant a_k \leqslant 25$ iga $k = 1, \ldots, 10$ korral. Tõestage, et leiduvad täisarvud $n_1, \ldots, n_{10}$, mis pole korraga nullid, nii, et
$$\prod_{k=1}^{10} a_k^{n_k} = 1.$$

4. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_{3,5}(\mathbb{C})$ ja $B \in \mathrm{Mat}_{5,3}(\mathbb{C})$ sellised maatriksid, et
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Leidke maatriksi BA Jordani normaalkuju.

Märkus. Ruutmaatriksi $C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ *Jordani normaalkuju* on selline maatriks $J \in \mathrm{Mat}_n(K)$, et C ja J on sarnased (sama lineaarkujutuse maatriksid mingite baaside suhtes) ning mööda J peadiagonaali asuvad Jordani kastid kujul

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

kus λ on C mingi omaväärtus. (Iga omaväärtuse jaoks on vähemalt üks Jordani kast, sealjuures erijuhul võib see ka olla 1×1 kast kujul $\begin{pmatrix}\lambda\end{pmatrix}$.) Väljaspool Jordani kaste on maatriks J täidetud nullidega.

5. Olgu funktsioon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klassist C^1 (see tähendab, et funktsiooni f mõlemad osatuletised f_x ja f_y eksisteerivad kogu tasandil ning on pidevad). Kehtigu võrdus $f_x = f_y$. Olgu iga $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x, 0) > 0$. Tõestage, et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) > 0.$$

6. Leidke kõik funktsioonid $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mis iga kahe vektori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ korral rahuldavad tingimust

$$\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \times \varphi(\mathbf{v}).$$

Math Olympiad of University of Tartu

Tartu, 19.05.2023

1. We know that
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
Find the sum of the following series:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$
or prove that the series diverges.

2. Let A, B, C be independent uniform random variables of $[-N, N]$ where N is a large real number ($N \gg 4$).
   (a) Calculate the probability that $B^2 - 4C \geqslant 0$ (i.e., the probability that the solutions of the quadratic equation $x^2 + Bx + C = 0$ are real). Prove that the limit of the probability exists as $N \to \infty$ and find this limit.
   (b) Calculate the probability that $B^2 - 4AC \geqslant 0$ (i.e., the probability that $A = 0$ or the solutions of the quadratic equation $Ax^2 + Bx + C = 0$ are real). Prove that the limit of the probability exists as $N \to \infty$ and find this limit.

3. Let $a_1, \ldots, a_{10}$ be integers such that $1 \leqslant a_k \leqslant 25$ for every $k = 1, \ldots, 10$. Prove that there exist integers $n_1, \ldots, n_{10}$ not simultaneously zero such that
$$\prod_{k=1}^{10} a_k^{n_k} = 1.$$

4. Let $A \in \mathrm{Mat}_{3,5}(\mathbb{C})$ and $B \in \mathrm{Mat}_{5,3}(\mathbb{C})$ be matrices such that
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Find the Jordan canonical form of BA.

Remark. The *Jordan canonical form* of a square matrix $C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ is a matrix $J \in \mathrm{Mat}_n(K)$ such that C and J are similar (they are matrices of the same linear transformation with respect to some bases) and Jordan boxes of the form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(where λ is some eigenvalue of C) are situated along the main diagonal of J. (For every eigenvalue there is at least one Jordan box, as a special case it can also be 1×1 box of the form $\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$.) Outside the Jordan boxes the matrix J is filled in zeros.

5. Let the function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ belong to class C^1 (i.e., both partial derivatives f_x and f_y exist on the real plane and are continuous). Let us have $f_x = f_y$. Let there hold $f(x, 0) > 0$ for every $x \in \mathbb{R}$. Prove that

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) > 0.$$

6. Find all functions $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ such that for every two vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ there holds

$$\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \times \varphi(\mathbf{v}).$$

Lahendused

1. Olgu

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

siis ülesande teksti põhjal $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$. (Kehtib ka $S_{2n} \to \frac{\pi^2}{6}$, sest koonduva jada osajadad koonduvad samaks piirväärtuseks, mis algne jada ise.)

Saame, et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = S_{2n} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} \right) =$$
$$= S_{2n} - \frac{1}{4} S_n \to \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Märkus. Ülesande tekstis on tegelikult liigset informatsiooni, kuna mitmel moel on võimalik näidata, et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Võib-olla lihtsaim on seda tõestada, arendades funktsiooni $f(x) = x^2$ Fourier' ritta. Saame, et

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

ning valime ülalsaadud võrduses $x = \pi$.

2. (a) Leiame kõigepealt punktide (B, C) hulga pindala, mille korral $B^2 - 4C < 0$. Tegemist on paraboolist $C = \frac{B^2}{4}$ ülespoole jääva pinnaosaga, mille pindala on

$$\int_{-2\sqrt{N}}^{2\sqrt{N}} \left(N - \frac{x^2}{4} \right) \mathrm{d}x = \left(Nx - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{x=-2\sqrt{N}}^{2\sqrt{N}} = \frac{8N\sqrt{N}}{3}.$$

Kuna kogu ruudu pindala on $4N^2$, siis tingimust $B^2 - 4C \geqslant 0$ rahuldavate punktide (B, C) hulga pindala on $4N^2 - \frac{8N\sqrt{N}}{3}$ ning vastav tõenäosus on järelikult

$$1 - \frac{\frac{8N\sqrt{N}}{3}}{4N^2} = 1 - \frac{2}{3\sqrt{N}}.$$

Et

$$1-\frac{2}{3\sqrt{N}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1,$$

siis oleme saanud, et otsitav piirväärtus on 1.

(b) Otsime nüüd punktihulga

$$\big\{(A,B,C)\colon\, B^2 \geqslant 4AC\big\}$$

ruumala suhet kogu kuubi $[-N,N]^3$ ruumalasse (mis on $8N^3$). Tähistame sümboliga $[P]$ tingimust P rahuldavate punktide (A,B,C) hulga karakteristlikku funktsiooni, see tähendab siis

$$[P](A,B,C)=\begin{cases}1, & \text{kui } P(A,B,C) \text{ on tõene,}\\ 0, & \text{muul juhul.}\end{cases}$$

Meie ülesandeks on leida suhe

$$p=\frac{1}{8N^3}\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-N}^{N}[B^2\geqslant 4AC]\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B.$$

Saame, et

$$\begin{aligned}p&=\frac{1}{8N^3}\cdot 2\int\limits_{0}^{N}\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-N}^{N}[B^2\geqslant 4AC]\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B=\\&=\frac{1}{4N^3}\int\limits_{0}^{N}\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{0}^{N}\big([B^2-4AC\geqslant 0]+[B^2+4AC\geqslant 0]\big)\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B=\\&=\frac{1}{4N^3}\int\limits_{0}^{N}\int\limits_{0}^{N}\int\limits_{0}^{N}\big([B^2-4AC\geqslant 0]+[B^2+4AC\geqslant 0]+\\&\qquad+[B^2+4AC\geqslant 0]+[B^2-4AC\geqslant 0]\big)\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B.\end{aligned}$$

Et mittenegatiivsete A,C korral alati $B^2+AC\geqslant 0$, siis

$$p=\frac{1}{4N^3}\cdot\left(2N^3+2\int\limits_{0}^{N}\int\limits_{0}^{N}\int\limits_{0}^{N}[B^2-4AC\geqslant 0]\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B\right).$$

Arvutame edasi sisukat osa, tehes muutuja vahetuse $c = AC$. Saame, et $\mathrm{d}C = \dfrac{\mathrm{d}c}{A}$ ning tingimused $B^2 - 4AC \geqslant 0$ ja $B^2 - 4c \geqslant 0$ on ekvivalentsed:

$$\int_0^N \int_0^N \int_0^N [B^2 - 4AC \geqslant 0]\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B = \int_0^N \int_0^N \frac{1}{A} \int_0^{AN} [B^2 - 4c \geqslant 0]\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B.$$

Vahetame sisemistes integraalides integreerimisjärjekorra, sest

$$\{(A, c)\colon A \in (0, N), c \in (0, AN)\} = \{(A, c)\colon c \in (0, N^2), A \in (\tfrac{c}{N}, N)\}.$$

Saame, et

$$\begin{aligned}
\int_0^N \int_0^N \frac{1}{A} \int_0^{AN} [B^2 - 4c \geqslant 0]\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B &= \int_0^N \int_0^{N^2} [B^2 - 4c \geqslant 0] \int_{\frac{c}{N}}^{N} \frac{1}{A}\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}B = \\
&= -\int_0^N \int_0^{N^2} \left[c \leqslant \frac{B^2}{4}\right] \ln \frac{c}{N^2}\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}B = \\
&= -\int_0^N \int_0^{\frac{B^2}{4}} \ln \frac{c}{N^2}\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}B.
\end{aligned}$$

Ositi integreerimise teel leiame, et

$$\int \ln \frac{x}{N^2}\,\mathrm{d}x = x \ln \frac{x}{N^2} - x + \mathrm{const}.$$

Arvestama peame ka piirväärtust $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, mis võimaldab logaritmi sisaldavad päratud integraalid (nullpunkti juures läheb integrand lõpmatusse) välja arvutada. Seega

$$\begin{aligned}
\int_0^N \int_0^N \int_0^N [B^2 - 4AC \geqslant 0]\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}B &= -\int_0^N \left(\frac{B^2}{4} \ln \frac{B^2}{4N^2} - \frac{B^2}{4}\right) \mathrm{d}B = \\
&= \int_0^N \left(\frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{2} \ln B + \frac{B^2}{2} \ln(2N)\right) \mathrm{d}B = \\
&= \int_0^N \left(\frac{1 + 2\ln(2N)}{4} B^2 - \frac{B^2}{2} \ln B\right) \mathrm{d}B.
\end{aligned}$$

Et veelkord ositi integreerimine annab

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \mathrm{const},$$

siis

$$\int\limits_0^N \int\limits_0^N \int\limits_0^N [B^2 - 4AC \geqslant 0] \, \mathrm{d}C \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}B = \frac{1 + 2\ln 2 + 2\ln N}{12} \cdot N^3 - \frac{N^3}{6} \ln N + \frac{N^3}{18} =$$

$$= \frac{5 + 6\ln 2}{36} \cdot N^3.$$

Kokkuvõttes on otsitav tõenäosus

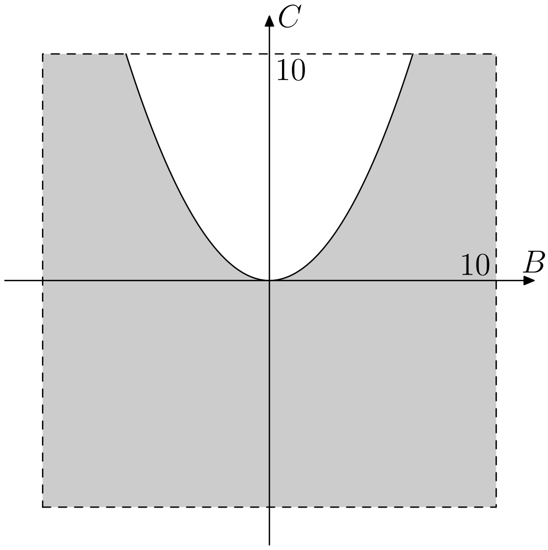
$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N^3} \cdot \frac{5 + 6\ln 2}{36} \cdot N^3 = \frac{1}{2} + \frac{5 + 6\ln 2}{72} = \frac{41}{72} + \frac{\ln 2}{12} \approx 62{,}7\%,$$

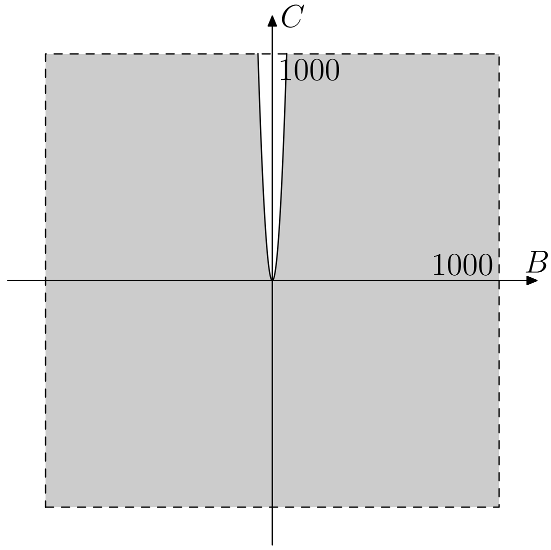
mis piirile $N \to \infty$ minnes muidugi jääb muutumatuks.

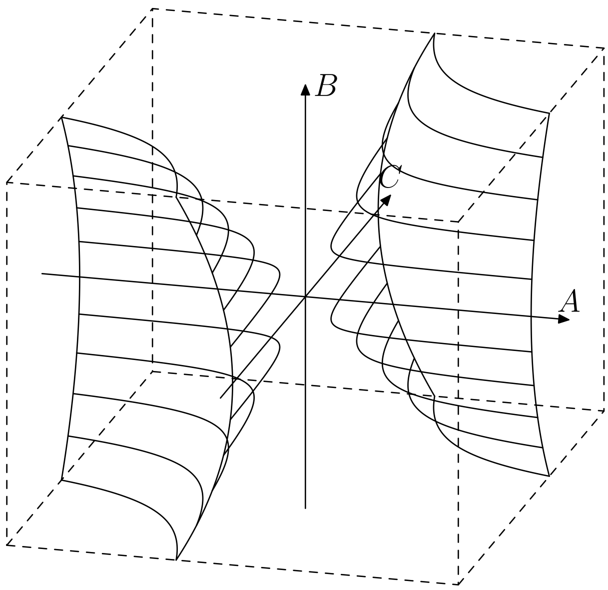
Märkus. See, et ülesande (a)- ja (b)-osa vastused on erinevad (ning et erinev on ka nende sõltuvus või mittesõltuvus ruudu/kuubi külje/servapikkusest $2N$) on esmapilgul kontraintuitiivne. On ju hästi teada, et võrrandi $Ax^2 + Bx + C = 0$ saab juhul $A \neq 0$ teisendada võrrandiks $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$, sealjuures algse ja teisendatud võrrandi lahendid on samad. Veelgi enam, võrrandeid, mille korral $A = 0$ (lineaarvõrrandid, samasused $0 = 0$ ja vasturääkivused $1 = 0$), on tühisel hulgal võrreldes ruutvõrranditega, kus $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mistõttu lineaarvõrrandite „lisandumine“ ei peaks vastust oluliselt mõjutama.

Ometigi pole ülesande osad sellise teisenduse abil üksteiseks viidavad, kuna teisendatud võrrandi $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$ kordajad $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ ei ole enam sõltumatud ega ühtlase jaotusega lõigus $[-N, N]$. Populaarselt võiks öelda, et tingimuste $B^2 \geqslant 4C$ ja $B^2 \geqslant 4AC$ võrdlemisel on teises tingimuses võrratuse paremal pool „juhuslikkust rohkem“, mis saab ka tingida seda, et tegu on erinevate ülesannetega ning saadakse erinevad vastused.

Allpool on võrdlusena toodud (a)-osa pindala (hall ala) ning (b)-osa pind $B^2 = 4AC$ (tasemejooned B väärtuste fikseerimisel on hüperboolid $AC = \frac{B^2}{4}$).







3. Lõigul $[1, 25]$ on üheksa algarvu: $(p_k)_{k=1}^9 = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23)$. Vastavalt aritmeetika põhiteoreemile vastab igale täisarvule $a \in [1, 25]$ üheselt määratud astendajate korteež $v(a) = (v_j(a))_{j=1}^9$ nii, et $a = \prod_{j=1}^{9} p_j^{v_j(a)}$.

   Antud 10 arvu tekitavad 10 sellist korteeži $v(a_k)$, $k = 1, \ldots, 10$. Vaadeldes neid korteeže vektorruumi $\mathbb{Q}^9$ (üle $\mathbb{Q}$) elementidena, on tegemist 10-elemendilise vektorsüsteemiga 9-mõõtmelises ruumis. Järelikult on vektorsüsteem $v(a_1), \ldots, v(a_{10})$ lineaarselt sõltuv, mistõttu leiduvad ratsionaalarvulised kordajad $n_1, \ldots, n_{10}$, mis pole kõik korraga nullid, nii, et

$$\sum_{k=1}^{10} n_k v_j(a_k) = 0, \qquad j = 1, \ldots, 9.$$

Olles korrutanud kõiki võrdusi läbi ratsionaalarvude $n_1, \ldots, n_{10}$ ühise nimetajaga, võime eeldada, et kordajad n_i on täisarvud. Niisiis

$$\prod_{k=1}^{10} a_k^{n_k} = \prod_{j=1}^{9} p_j^{\sum_{k=1}^{10} n_k v_j(a_k)} = 1,$$

nagu soovitud.

4. Kuna maatriksi $AB \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ astak on 3, siis on ka tegurite A ja B astakud 3, mistõttu $BA \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{C})$ astak on 3. Vastavalt teoreemile tuumast ja kujutisest (tuuma ja kujutisruumi mõõtmete summa on lähteruumi mõõde) on $\dim \ker BA = 2$. Olgu v_1, v_2 ruumi $\ker BA$ baas, see tähendab, $\mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ on kõigi selliste vektorite $x \in \mathbb{C}^5$ hulk, et $BAx = 0$.

   Olgu e_1, e_2, e_3 vektorruumi $\mathbb{C}^3$ standardne baas, st. $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,1)^T$. Saame, et

   $$ABe_1 = e_1, \qquad ABe_2 = e_1 + e_2, \qquad ABe_3 = -e_3,$$

   järelikult

   $$BABe_1 = Be_1, \qquad BABe_2 = Be_1 + Be_2, \qquad BABe_3 = -Be_3.$$

   Näitame, et $v_1, v_2, Be_1, Be_2, Be_3$ on lineaarselt sõltumatu süsteem vektorruumis $\mathbb{C}^5$ (seega $\mathbb{C}^5$ baas). Kehtigu $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 Be_1 + \lambda_4 Be_2 + \lambda_5 Be_3 = 0$, siis BA rakendamisel saame, et $\lambda_3 BABe_1 + \lambda_4 BABe_2 + \lambda_5 BABe_3 = 0$. Vektorsüsteem $Be_1, Be_2, Be_3 \in \mathbb{C}^5$ on ühtlasi maatriksi B veeruvektorite süsteem, järelikult on selle süsteemi astak 3. Niisiis on Be_1, Be_2, Be_3 lineaarselt sõltumatu süsteem. Järelikult on ka $BABe_1, BABe_2, BABe_3$ lineaarselt sõltumatu süsteem, mistõttu $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Et v_1, v_2 on lineaarselt sõltumatu, siis võrdus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ annab nüüd ka, et $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

   Lineaarteisenduse BA maatriks baasi $v_1, v_2, Be_1, Be_2, Be_3$ suhtes on

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Saadud maatriks ongi maatriksi BA Jordani normaalkuju.

5. Fikseerime suvaliselt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ning vaatleme punktide (x, y) ja $(x + y, 0)$ vahelist sirglõiku. Ühe muutuja funktsioon

$$g(t) := f((1-t)(x, y) + t(x + y, 0)) = f((1-t)x + t(x + y), (1-t)y)$$

on selle tõttu, et $f \in C^1$, lõigus $[0, 1]$ pidev ja vahemikus $(0, 1)$ diferentseeruv. Seega ta rahuldab lõigus $[0, 1]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi, mistõttu mingi $\tau \in (0, 1)$ korral

$$g(1) - g(0) = g'(\tau).$$

Arvutame selle võrduse komponendid välja. Saame, et

$$\begin{aligned}
g(0) &= f(x, y),\\
g(1) &= f(x + y, 0),\\
g'(\tau) &= f_x((1-\tau)(x, y) + \tau(x + y, 0)) \cdot (-x + x + y) +\\
&\qquad + f_y((1-\tau)(x, y) + \tau(x + y, 0)) \cdot (-y) =\\
&= f_x((1-\tau)(x, y) + \tau(x + y, 0)) \cdot y - f_x((1-\tau)(x, y) + \tau(x + y, 0)) \cdot y =\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$f(x, y) = f(x + y, 0) > 0.$$

Märkus. Mitme muutuja analüüsi kursuses sõnastatakse sageli C^1-funktsioonide jaoks järgmine Lagrange'i keskväärtusteoreemi variant: iga kahe punkti $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ korral leidub neid ühendaval sirglõigul $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ selline punkt Ξ, et

$$f(\mathbf{Y}) - f(\mathbf{X}) = \nabla f(\Xi) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{X}),$$

kusjuures $\nabla f := (f_x, f_y)$ (funktsiooni f gradient) ning $\cdot$ tähistab vektorite skalaarkorrutamist. Tulemuse tõestus sisuliselt kopeerib ülal läbiviidud arutelu ühemuutuja funktsiooniga g.

6. Ilmselt $\varphi \equiv \mathbf{0}$ on üks lahend. Eeldame järgnevas, et $\varphi \neq \mathbf{0}$.

   - Saame, et iga $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ korral $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0} \times \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{0}) \times \varphi(\mathbf{x})$, millest järeldub, et $\varphi(\mathbf{0}) \perp \varphi(\mathbf{0})$, niisiis $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
   - Oletame, et $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ mingi $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ korral. Siis ortogonaalse täiendi $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ iga vektor $\mathbf{u}$ on esitatav kujul $\mathbf{u} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$, kus $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. (Näiteks täiendame $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ruumi $\mathbb{R}^3$ kogu ruumi ortogonaalbaasiks ja skaleerime $\mathbf{w}$ pikkuse ja suuna õigeks.) Järelikult $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{w}) \times \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, teisiti öeldes, $\varphi|_{\langle \mathbf{v} \rangle^\perp} = \mathbf{0}$.

Kui nüüd $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ on valitud suvaliselt, siis esitame $\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{y}$, kus $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$ ja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. (Valime näiteks $\mathbf{u} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$, siis $\mathbf{u} \perp \mathbf{x}$ ja $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, täiendame süsteemi $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ kogu ruumi ortogonaalbaasiks ja skaleerime-suuname kolmanda vektori $\mathbf{y}$ õigeks.) Nüüd aga $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, mis on vastuolus sellega, et $\varphi \neq \mathbf{0}$.

Oleme saanud, et kui $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, siis $\varphi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$.

- Paneme tähele, et $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ parajasti siis, kui $\varphi(\mathbf{u}) \parallel \varphi(\mathbf{v})$. Tõepoolest, tingimus $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ tähendab seda, et nende vaheline nurk on 0 või π või on emb-kumb vektoritest nullvektor, misjuhul on nurk määramata. See omakorda tähendab, et $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 0$ ehk $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, mis omakorda ütleb, et $\varphi(\mathbf{u}) \times \varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, järelikult $\varphi(\mathbf{u}) \parallel \varphi(\mathbf{v})$.
- Edasi, kehtigu $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ (kus $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), siis tähistame $\mathbf{w}$ nii, et $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, nüüd $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}) \times \varphi(\mathbf{w})$, järelikult $\varphi(\mathbf{u}) \perp \varphi(\mathbf{v})$. Seega $|\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{v})| = |\varphi(\mathbf{u}) \times \varphi(\mathbf{v})| = |\varphi(\mathbf{u})| \cdot |\varphi(\mathbf{v})|$. (Võrdus kehtib ka juhul $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.)
- Ülaltoodud omadused võimaldavad saada, et standardne ühikristbaas viiakse standardseks ühikristbaasiks. Tõepoolest, olgu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ristuvate ühikvektorite parema käe kolmik. Siis ka $\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3)$ on ristuvad vektorid, kusjuures $|\varphi(\mathbf{e}_2)| = |\varphi(\mathbf{e}_1)| \cdot |\varphi(\mathbf{e}_3)| = |\varphi(\mathbf{e}_1)|^2 |\varphi(\mathbf{e}_2)|$, mistõttu $|\varphi(\mathbf{e}_1)| = 1$, analoogselt on ka teised vektorid $\varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3)$ ühikvektorid. Ka käelisus säilib, sest $\varphi(\mathbf{e}_3) = \varphi(\mathbf{e}_1) \times \varphi(\mathbf{e}_2)$.

  Niisiis, võime eeldada, et $\varphi'(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, kus $\varphi = U\varphi'$ ja $U \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on ruumi mingi pööre (lineaarteisendus, mille maatriks ortonormeeritud baasil on ortogonaalmaatriks).
- On jäänud välja selgitada, kuidas baasivektoreid säilitav φ' käitub kogu ruumi vektoritega. Vaatleme projektorit $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$-tasandile; $P_{23}(x, y, z) = (0, y, z)$, kus $P_{23}(\mathbf{u}) = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}) \times \mathbf{e}_1$. Paneme tähele, et φ' kommuteerub projektoriga P_{23}. Tõepoolest,

  $$(\varphi' \circ P_{23})(\mathbf{v}) = \varphi'((\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1 \times \varphi'(\mathbf{v})) \times \mathbf{e}_1 = P_{23}(\varphi'(\mathbf{v})) = (P_{23} \circ \varphi')(\mathbf{v}).$$

  Analoogselt saab näidata, et φ' kommuteerub ka projektoritega $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$-tasandile ja $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$-tasandile, järelikult ka projektoritega telgedele $P_1 = P_{12}P_{13}$, $P_2 = P_{12}P_{23}$ ja $P_3 = P_{13}P_{23}$. Niisiis, kui $\mathbf{v} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, siis

  $$\begin{aligned}\varphi'(\mathbf{v}) &= P_1\varphi'(\mathbf{v}) + P_2\varphi'(\mathbf{v}) + P_3\varphi'(\mathbf{v})) = \varphi' P_1(\mathbf{v}) + \varphi' P_2(\mathbf{v}) + \varphi' P_3(\mathbf{v})) = \\ &= \varphi'(x, 0, 0) + \varphi'(0, y, 0) + \varphi'(0, 0, z) = (f_1(x), f_2(y), f_3(z)),\end{aligned}$$

kus $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on teatavad ühemuutuja funktsioonid:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \varphi'(x,0,0)\cdot \mathbf{e}_1,\\ f_2(y) &= \varphi'(0,y,0)\cdot \mathbf{e}_2,\\ f_3(z) &= \varphi'(0,0,z)\cdot \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

seoses sellega, et

$$\varphi'(x,0,0) = \varphi' P_1(x,0,0) = P_1\varphi'(x,0,0) = (\varphi'(x,0,0)\cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1,$$

analoogselt ka teiste koordinaatidega.

- Arutelu lõpetuseks tuleb niisiis välja selgitada f_1, f_2, f_3 käitumine.
- Osutub, et funktsioon φ on paaritu. Olgu $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ suvaline, teadaolevalt leiduvad $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ nii, et $\mathbf{u} = \mathbf{v}\times\mathbf{w}$. (Sellised vektorid saab valida nii, et võtta kahemõõtmelise ruumi $\langle \mathbf{u}\rangle^\perp$ ristbaas ning normeerida ja varustada õige märgiga saadud vektoreid selliselt, et pikkus ja käelisus tuleks õige.) Nüüd

$$\varphi(-\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{w}\times\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w})\times\varphi(\mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{v})\times\varphi(\mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{u}).$$

- Osutub, et $f_1 = f_2 = f_3$. Nimelt, iga $t \in \mathbb{R}$ korral

$$f_1(t)\cdot\mathbf{e}_1 = \varphi'(t\mathbf{e}_1) = \varphi'(t\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3) = \varphi(t\mathbf{e}_2)\times\mathbf{e}_3 = (f_2(t)\cdot\mathbf{e}_2)\times\mathbf{e}_3 = f_2(t)\cdot\mathbf{e}_1,$$

analoogselt ka $f_2 = f_3$.
Niisiis

$$\varphi'(x,y,z) = (f(x), f(y), f(z)),$$

kus $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on mingi paaritu funktsioon, mis viib nulliks ainult nulli.

- Kuna

$$f(st)\cdot e_3 = \varphi((st)\mathbf{e}_3) = \varphi(s\mathbf{e}_1\times t\mathbf{e}_2) = f(s)\mathbf{e}_1\times f(t)\mathbf{e}_2 = f(s)f(t)\cdot\mathbf{e}_3,$$

siis f on multiplikatiivne. Muuhulgas iga $s>0$ korral $f(s) = f((\sqrt{s})^2) = (f(\sqrt{s}))^2 > 0$ ning $f(1)=1$.

- Kuna

$$(s, t, -(s+t)) \perp (1,1,1),$$

siis

$$(f(s), f(t), -f(s+t)) \perp (f(1), f(1), f(1)) = (1,1,1),$$

järelikult

$$f(s)+f(t) = f(s+t), \qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

Seega f on aditiivne. Cauchy meetodil saab siit vahetult järeldada, et $f(q) = q$ iga $q \in \mathbb{Q}$ korral. Tõepoolest, kui $n \in \mathbb{N}$, siis $f(n) = nf(1) = n$, seega $1 = f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n})$, mistõttu $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, ja nüüd $m \in \mathbb{N}$ korral $f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n}$. Negatiivse m juhtumil tuleb kasutada ka seda, et f on paaritu.

- Lisatingimus, et $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, aitab näha, et $f(x) = x$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Tõepoolest, kui $x_n < x < y_n$ on arvu x puuduga ja liiaga lähendavad ratsionaalarvude jadad, $x_n \to x$, $y_n \to x$, siis

  $$0 < f(x - x_n) = f(x) + f((-1)x_n) = f(x) + f(-1)f(x_n) = f(x) - x_n,$$

  mistõttu $x_n < f(x)$, analoogselt $f(x) < y_n$. Keskmise muutuja omadus annab nüüd, et kuna $x_n \to x$ ja $y_n \to x$, siis ka $f(x) \to x$, mistõttu $f(x) = x$.

  Niisiis $\varphi'(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ iga $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ korral.

- Kokkuvõttes oleme saanud, et $\varphi(\mathbf{u}) = U\varphi'(\mathbf{u}) = U\mathbf{u}$, kus U on ortogonaalteisendus.

On jäänud veel kontrollida, et $\varphi(\mathbf{u}) = U\mathbf{u}$, kus U on mingi ortogonaalteisendus, sobib ülesande lahendiks, see tähendab, rahuldab seost $\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \times \varphi(\mathbf{v})$. (Nullteisenduse korral on selline seos ilmselt rahuldatud.)

Kõigepealt saame, et

$$\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \varphi(\mathbf{u}) = U(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot U\mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0,$$
$$\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = U(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot U\mathbf{v} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Järelikult $\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \parallel \varphi(\mathbf{u}) \times \varphi(\mathbf{v})$.

Olgu nüüd $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ruumi $\mathbb{R}^3$ ühikristbaas. Kuna samal ajal $\varphi(\mathbf{e}_1) = \varphi(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ on paralleelne vektoriga $\varphi(\mathbf{e}_2) \times \varphi(\mathbf{e}_3)$ ning $\varphi(\mathbf{e}_1) \cdot (\varphi(\mathbf{e}_2) \times \varphi(\mathbf{e}_3)) = \det U = 1$, siis $\varphi(\mathbf{e}_2) \times \varphi(\mathbf{e}_3) = t\varphi(\mathbf{e}_1)$ ning samas $1 = t\varphi(\mathbf{e}_1) \cdot \varphi(\mathbf{e}_1) = t(U\mathbf{e}_1 \cdot U\mathbf{e}_1) = t$, mistõttu $\varphi(\mathbf{e}_2) \times \varphi(\mathbf{e}_3) = \varphi(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$. Analoogselt ka $\varphi(\mathbf{e}_3) \times \varphi(\mathbf{e}_1) = \varphi(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)$ ning $\varphi(\mathbf{e}_1) \times \varphi(\mathbf{e}_2) = \varphi(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$. Et saada samasugune tulemus nüüd suvaliste kahe vektori korral, kasutame vektorkorrutise distributiivsust ja φ lineaarsust.

Märkus. Funktsiooni φ mitmesuguseid omadusi (aditiivsus, homogeensus jms.) võib saada ka mitmesuguste muude arutluskäikude tulemusel.