Tartu Ülikooli matemaatikaolümpiaad

Tartu, 20.05.2022

1. Olgu A lõpmatu maatriks, mis on saadud Pascali kolmnurga külilikeeramisel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \\ 1 & 3 & 6 & \dots & & \\ 1 & 4 & \vdots & & & \\ 1 & \vdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

   (Täpsemalt, maatriksi A vasakpoolses veerus ja ülemises reas on ühed ning iga muu element on tema kohal ja temast vasakul oleva elemendi summa.)

   Tõestage, et maatriksi A iga miinor, mis on saadud vasakult lugedes n esimese veeru ja ülalt lugedes n esimese rea väljavalimisel (nn. *juhtmiinor*), on võrdne 1-ga.

2. Funktsioon $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ on ühtlaselt pidev hulgas $[0, \infty)$. On teada, et iga reaalarvu $x \geqslant 0$ korral arvjada $(f(x + n))_n$ koondub nulliks. Tõestage, et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

   Märkus. Funktsiooni f ühtlane pidevus hulgas X tähendab seda, et mistahes $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et suvaliste $x, x' \in X$ korral kehtib implikatsioon $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

3. Jüri ja Mari mängivad järgmist mängu. Mari valib 4×4 ruudustiku ruutudest välja 7 ruutu ning paigutab igaühesse neist ühe tärni. Seejärel valib Jüri välja kaks rida ja tühjendab need tärnidest, ning valib välja kaks veergu ja tühjendab need tärnidest. Kui ruudustik on nüüd tühi, võitis Jüri, vastasel korral võitis Mari.

   (a) Kirjeldage kõiki võimalusi, kuidas peab Mari tärnid paigutama, et tema võit oleks garanteeritud.

   (b) Leidke selliste tärnipaigutuste koguarv, mille korral Mari garanteeritult võidab. Ruudustikku ei pöörata; pööramistel ja peegeldustel üksteisest saadavad paigutused loeme erinevateks.

4. Olgu G selline rühm, milles kehtivad järgmised kaks tingimust:

   - **puuduvad** elemendid järguga 2, st. puuduvad sellised elemendid $x \in G \setminus \{1\}$, et $x^2 = 1$,
   - $(xy)^2 = (yx)^2$ kõigi $x, y \in G$ korral.

   Tõestage, et G on Abeli rühm.

5. Pulgale pikkusega 1 märgitakse teineteisest sõltumatult kaks juhuslikku ühtlase jaotusega murdepunkti. Siis murtakse pulk valitud kohtadest katki, seega tekib kolm (üldjuhul eri pikkusega) juppi. Leidke lühima jupi pikkuse keskväärtus, keskmise pikkusega jupi pikkuse keskväärtus ja pikima jupi pikkuse keskväärtus.

6. Tõestage võrdus

$$\int_0^1 x^{-x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

Math Olympiad of University of Tartu

Tartu, 20.05.2022

1. Let A be an infinite matrix that has been obtained by rotating the Pascal triangle sideways:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \\ 1 & 3 & 6 & \dots & & \\ 1 & 4 & \vdots & & & \\ 1 & \vdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

(More precisely, in the leftmost column and uppermost row of A there are 1-s and every other element is the sum of its top and left neighbour.)

Prove that every minor of A that has been obtained by choosing n first columns from the left and n first rows from the top (i.e., *leading principal minor*) equals 1.

2. A function $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous in $[0, \infty)$. It is known that for every real number $x \geqslant 0$ the sequence $(f(x+n))_n$ converges to zero. Prove that

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Remark. Uniform continuity in a set X of a function f means that for every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for all $x, x' \in X$ there holds an implication $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

3. Jüri and Mari are playing the following game. Mari chooses 7 squares from the table of 4×4 squares, and puts one asterisk into every one of the chosen squares. After that, Jüri chooses two rows and cleans all asterisks from these rows, and chooses two columns and cleans all asterisks from these columns. If the table is now empty, the winner is Jüri, otherwise the winner is Mari.

   (a) Describe all possibilities how Mari should locate the asterisks in order to guarantee her victory.

   (b) Find the total number of such arrangements of asterisks where Mari's victory is guaranteed. The table is not rotated; arrangements that can be obtained from each other by rotation or reflection are considered to be different.

4. Let G be a group with the following properties:

   - it **does not contain** elements of order 2, i.e., does not contain such elements $x \in G \setminus \{1\}$ for which $x^2 = 1$,
   - $(xy)^2 = (yx)^2$ for every $x, y \in G$.

   Prove that G is abelian.

5. Consider a stick of length 1. Independently of each other, two random breakpoints of uniform distribution are marked on the stick. After that the stick is broken at the chosen points, yielding three parts (in general, of different lengths). Find the mean of the length of the shortest part, mean of the length of the second shortest part, mean of the length of the longest part.

6. Prove that

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

Lahendused

1. Ilmselt väide kehtib $n = 1$ korral (vahetu kontroll).

   Vaatleme üldjuhu tõestamiseks maatriksit $A_n = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, mis tugineb maatriksi A esimesele n reale ja esimesele n veerule, kusjuures teame, et seal kehtib binoomkordajate omadus $a_{i,j} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j}$, välja arvatud esimese rea ja veeru jaoks (nendes on $a_{i,1} = a_{1,j} = 1$).

   Teostame maatriksiga A_n järgmised elementaarteisendused: n-ndast reast lahutame $(n-1)$. rea, $(n-1)$. reast lahutame $(n-2)$. rea jne. Kuna

   $$a_{k,j} = a_{k,j-1} + a_{k-1,j}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n,$$

   siis k-ndast reast $(k-1)$. rea lahutamisel tuleb $a_{k,j}$ asemele $a_{k,j-1}$. Kokkuvõttes saame, et

   $$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \ldots & a_{2,n} \\ 1 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n-1} \\ 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

   Järgnevalt teostame saadud maatriksiga elementaarteisendused: n-ndast veerust lahutame $(n-1)$. veeru, $(n-1)$. veerust lahutame $(n-2)$. veeru jne. Nüüd annab võrdus

   $$a_{i,k} = a_{i-1,k} + a_{i,k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n,$$

   selle, et k-ndast veerust $(k-1)$. veeru lahutamisel tuleb $a_{i,k}$ asemele $a_{i-1,k}$. Kokkuvõttes saame, et

   $$A_n \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n-1} \\ 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

   Saadud maatriksi teisest reast ja veerust alates on alammaatriks A_{n-1}. Determinandi arvutamisel saame esimese rea järgi arendada ning peame silmas, et teostatud elementaarteisendused ei muuda determinanti. Niisiis induktiivselt

   $$\det A_n = \det A_{n-1} = \ldots = \det A_1 = 1.$$

2. Fikseerime reaalarvu $\varepsilon > 0$. Meie ülesanne on leida reaalarv $D > 0$ selliselt, et suvalise $x \geqslant 0$ korral kehtiks implikatsioon

   $$x > D \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

   Ühtlase pidevusega seonduvalt leiame kõigepealt sellise $\delta > 0$, et suvaliste $x, x' \geqslant 0$ korral kehtiks implikatsioon

   $$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Valime poollõigus $[0,1)$ (lihtsuse mõttes ühtlase) δ-võrgu, näiteks punktid $x_j = \frac{j}{k}$, kus $k > \frac{1}{\delta}$, $j = 0, \ldots, k-1$. Selliseid punkte on lõplik arv, mistõttu on võimalik valida ühine N omadusega, et kui $n \geqslant N$, siis $|x_j + n| < \frac{\varepsilon}{2}$ kõigi $j = 0, \ldots, k-1$ korral.

   Olgu nüüd $x > N + 1$. Siis $\lfloor x \rfloor > N$ ning $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$. Et punktid $x_0, \ldots, x_{k-1}$ on poollõigu $[0,1)$ δ-võrk, siis leidub x_j nii, et $|x - \lfloor x \rfloor - x_j| < \delta$. Kuna $\lfloor x \rfloor > N$, siis $|f(x_j + \lfloor x \rfloor)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Valides $x' = x_j + \lfloor x \rfloor$, siis seetõttu, et $|x - x'| < \delta$, kehtib $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Kokkuvõttes

   $$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x')| + |f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. a) Analüüsime, milline peab olema tärnide paigutus, et kahe rea ja kahe veeru tühjendamisega poleks võimalik kogu tabelit tühjendada.

Kõigepealt pole võimalik, et mõnes reas või veerus oleks 3 tärni. Tõepoolest, olgu näiteks ühes reas 3 tärni, siis mingis teises reas peab olema ka vähemalt 2 tärni. Jüri tühjendaks need read ning alles jääks ainult kaks tärni, mida saab kahe veeru tühjendamisega kõrvaldada.

Niisiis on nii ridades kui veergudes tärnide arvud $(2,2,2,1)$.

Vaatleme rida, kus on 1 tärn. Kui oletada, et temale vastavas veerus V on siiski 2 tärni, võidaks Jüri. Nimelt, ta tühjendaks kaks (muud) rida, kus on 2 tärni, siis selle veeru V, ning alles on ainult 1 tärn, mille saab veeru tühjendamisega kõrvaldada.

Kokkuvõttes peab üks tärn olema ainus oma reas ja veerus. Ülejäänud 6 tärni on siis paigutatud kolme rea/veeru peale, igas reas/veerus kaks tärni. See tähendab, et ülejäänud 6 tärni asuvad tsükliliselt: kaks tärni T_1 ja T_2 mingis reas, siis T_2-le vastavas veerus olemas veel teine tärn T_3, temale vastavas reas omakorda teine tärn T_4, temale vastavas veerus (see ei saa olla sama veerg, kus asub T_1, kuna siis oleks juba täidetud kaks rida ja kaks veergu, mistõttu ei saaks kolmandasse ritta ja veergu kaht tärni paigutada) teine tärn T_5. Nüüd on ainult T_1-le vastavas veerus üks tärn, aga peaks olema kaks, sinna tuleb panna tärn T_6.

Teiselt poolt selline konfiguratsioon – üks tärn üksinda ning ülejäänud kuus tükki tsükliliselt – garanteerib Mari võidu. Tõepoolest, Jüri peab kulutama (näiteks) ühe rea üksinda seisvale tärnile; teise kulutab siis mingile reale, kus on kaks tärni. Ent ülejäänud kaks rida nelja tärniga sisaldavad tärne kõigis kolmes veerus ning neid kõiki ei saa kõrvaldada kahe veeru tühjendamise abil.

b) Loeme kokku paigutuste arvu, kasutades ülaltoodud kirjeldust. Üksinda seisva tärni valikuks on 16 võimalust. Eeldame nüüd, et üksinda seisev tärn on paigas; temast sõltumatult on nüüd vaja 9 ruudule paigutada 6 tärnist koosnev tsükkel. Valime ülalt esimese kahetärnilise rea. Sinna tärnide panekuks on 3 võimalust. Oletame nüüd, et need tärnid T_1 ja T_2 on paigas; seejärel on veel vaja määrata, kas järgmisel real on T_1-ga vastavas veerus üks tärn või T_2-ga vastavas veerus üks tärn. Ülejäänu on määratud üheselt.

Kokkuvõttes saame $16 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ paigutust.

4. Kõigepealt saame, et suvaliste $x, y \in G$ korral

$$x^2y = ((xy^{-1})y)^2y = (y(xy^{-1})^2y = yxy^{-1}yxy^{-1}y = yx^2.$$

Nüüd

$$x^{-1}yx = x(x^{-1})^2yx = xy(x^{-1})^2x = xyx^{-1}.$$

Saame, et

$$\begin{aligned}(xyx^{-1}y^{-1})^2 &= xy(x^{-1}y^{-1}x)yx^{-1}y^{-1} = xyx(y^{-1}x^{-1}y)x^{-1}y^{-1} = (xy)^2(x^{-1}y^{-1})^2 = \\ &= (yx)^2(x^{-1}y^{-1})^2 = yxyxx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Seega ülesande tingimuse tõttu $xyx^{-1}y^{-1} = 1$, järelikult $xy = yx$.

5. *Vastus.* $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{18}$ ja $\frac{11}{18}$.

Vaatleme pulka lõiguna $[0, 1]$, olgu murdekohad X ja Y, kus $0 < x < y < 1$. See tähendab, juhuslik paar (X, Y) on ühtlase jaotusega kolmnurgas, mida piiravad sirged $x = 0$, $y = 1$ ja $y = x$.

Tükkide pikkused on nüüd järgmised juhuslikud suurused: $X, Y - X, 1 - Y$. Üldisust kitsendamata piisab vaadelda X keskväärtust, kui X on vähim; X keskväärtust, kui X on suurim; kuna kogu pulga pikkus on 1, siis saadud kahe keskväärtuse 1-st lahutamisel saame keskmise pikkusega pulga keskväärtuse.

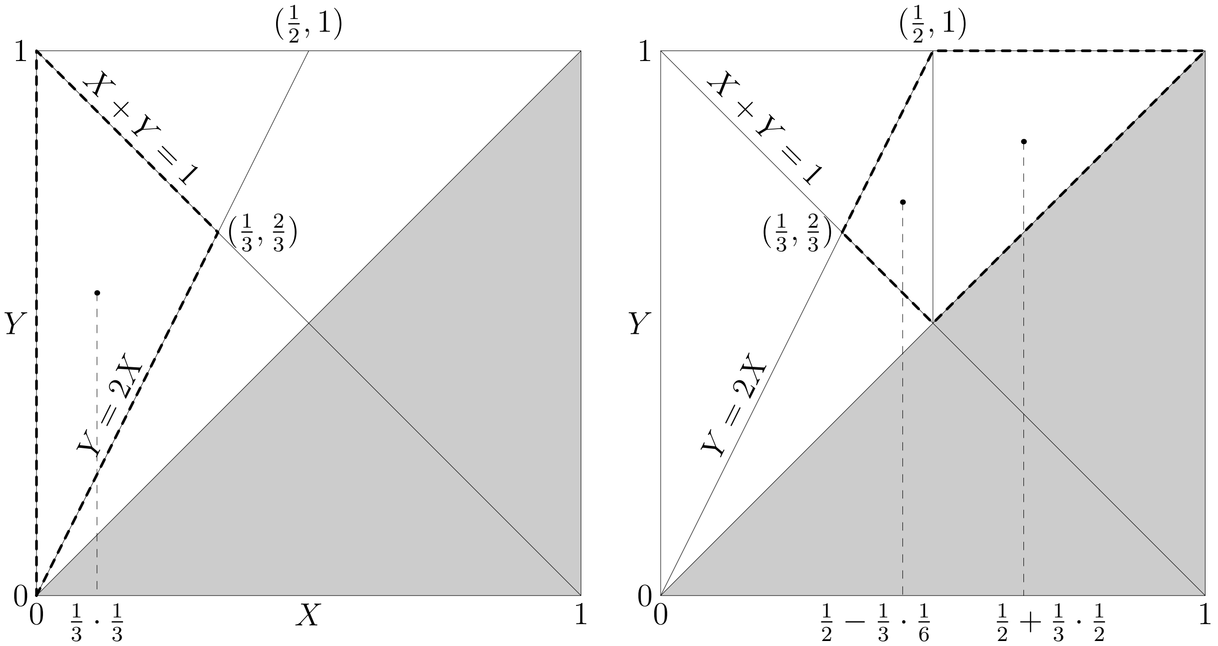
Kui X on vähim, siis $X < Y - X$ (ehk $2X < Y$) ning $X < 1 - Y$ (ehk $X + Y < 1$). Seega X keskväärtus on niisuguse kolmnurga raskuskeskme x-koordinaat, mida piiravad sirged $x = 0$, $2x = y$ ja $x + y = 1$. Kolmnurga raskuskeskme x-koordinaadi leidmiseks piisab võtta üks mediaan (nt. arvutuslikult lihtsaim) ning jaotada ta osades 2 : 1 tipu poolt. Saame, et raskuskeskme x-koordinaat on $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Kui X on suurim, siis $X > Y - X$ (ehk $2X > Y$) ning $X > 1 - Y$ (ehk $X + Y > 1$). Nüüd on uuritav piirkond nelinurk, mis on piiratud sirgetega $x = y$, $y = 1$, $2x = y$ ja $x + y = 1$. Suuruse X keskväärtuse leidmiseks jaotame selle nelinurga sirgega $x = \frac{1}{2}$ kaheks kolmnurgaks. Vasakpoolses kolmnurgas on X keskväärtuseks $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$ ja parempoolses $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Kogu nelinurga puhul X keskväärtus seega

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2})}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = \frac{11}{18}.$$

Siin kaalud $\frac{1}{6} : \frac{1}{2}$ on pindalade suhe, õigupoolest kõrguste suhe, sest alus on ühine.

Keskmise suurusega tüki keskväärtus on seega $1 - \frac{1}{9} - \frac{11}{18} = \frac{5}{18}$.



Märkus. Keskväärtused saab leida ka integraali abil, kasutades valemit $\int_D x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kus D on piirkond (antud juhtumil kolmnurk või nelinurk), mille punktide x-koordinaatide keskväärtust arvutame.

6. Integrand on lõigus $[0, 1]$ pidev funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x^{-x}, & \text{kui } x > 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Kuna $x^{-x} = \mathrm{e}^{-x \ln x}$, siis

$$f(x) = 1 - x \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-x \ln x)^k}{k!} + \ldots, \tag{1}$$

kusjuures kui $x = 0$, siis $x \ln x := 0$. (Sisuliselt tuleks iga kirjutise $x \ln x$ asemel lugeda $g(x)$, kus $g(x) = x \ln x$, kui $x > 0$, ja $g(0) = 0$.) Selline tähistus muudab funktsiooni g pidevaks lõigus $[0, 1]$, sest $\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$.

Koondumine (1) on punktiviisiline lõigus $[0,1]$, kuna kui $x > 0$, siis on tegu $\exp(-x\ln x)$ reaga, kui aga $x = 0$, siis nii vasakul kui paremal seisab 1. Koondumine on koguni ühtlane lõigus $[0,1]$, seda kontrollime Weierstrassi tunnusega. Kuna funktsiooni g miinimum on kohal $x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$, kus funktsioon saavutab väärtuse $-\frac{1}{\mathrm{e}} \approx -0{,}368$, intervallis $[0, x_0]$ on funktsioon kahanev, intervallis $[x_0, 1]$ on kasvav ning punktides 0 ja 1 on tema väärtus 0, siis $|x\ln x| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$. Saame funktsionaalrea liikmeid hinnata järgnevalt:

$$\left|\frac{(-x\ln x)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{x_0^k}{k!}.$$

Et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^k}{k!} = \mathrm{e}^{x_0} \in \mathbb{R}$, siis koondumine (1) on ühtlane intervallis $[0,1]$.

Seega on võimalik integraali ja rea summa märgid vahetada. Saame, et

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x\ln x)^k}{k!}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^k\,\mathrm{d}x}{k!} =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 (x\ln x)^k\,\mathrm{d}x.$$

Leiame rea liikmed ositi integreerimise teel, valides $u = (\ln x)^m$ ja $v = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ (eeldame, et $k \geqslant m$):

$$J_{k,m} = \int_0^1 x^k (\ln x)^m\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{m}{k+1} x^{k+1} (\ln x)^{m-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{m}{k+1} J_{k,m-1}.$$

Kuna

$$J_{k,0} = \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1},$$

siis

$$J_{k,k} = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}},$$

mistõttu

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} J_{k,k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$