Tartu Ülikooli üliõpilaste matemaatikaolümpiaad

31.05.2019

1. Olgu funktsioon $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ pidev ja rangelt kasvav, kusjuures
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x \ln x} = 1.$$
Tõesta, et pöördfunktsiooni f^{-1} korral
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x/\ln x} = 1.$$

2. Tõesta, et determinant
$$\begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix}$$
erineb nullist.

3. Arvuta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - n}{3^n}.$$

4. Ütleme, et funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *perioodiline*, kui leidub $t > 0$ nii, et $f(x + t) = f(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral ning *peaaegu perioodiline*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $t > 0$ nii, et $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x + t) - f(x)| < \varepsilon$. Tähistagu $P, A, B, C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vastavalt kõikide perioodiliste, peaaegu perioodiliste, tõkestatud ja pidevate funktsioonide osahulki. Vaatleme hulka $\mathcal{S}$, mille elemendid on hulgad P, A, B, C ning ka kõikvõimalikud nende ühisosad. On selge, et hulgas $\mathcal{S}$ on ülimalt $2^4 - 1 = 15$ elementi. Tõesta, et hulgas $\mathcal{S}$ on täpselt 10 elementi.

5. Hulk $M \subset \mathbb{R}^2$ on sümmeetriline iga sirge suhtes, mis läbib vähemalt 2 tema punkti. Tõesta, et M on kas ühe sirge peal või on kõikjal tihe tasandis $\mathbb{R}^2$.

6. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Öeldakse, et maatriksid $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ on kommuteeruvad, kui $AB = BA$. Olgu maatriksid $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ paarikaupa kommuteeruvad. Tõesta, et leiduvad kolm reaalarvu a, b, c nii, et $|a| + |b| + |c| > 0$ ja $|aA + bB + cC| = 0$.

1. Let a function $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ be continuous and strictly increasing such that

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x \ln x} = 1.$$

Prove that the inverse function f^{-1} satisfies

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x/\ln x} = 1.$$

2. Prove that the determinant

$$\begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix}$$

is not 0.

3. Calculate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - n}{3^n}.$$

4. Let us call a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodic*, if there exists $t > 0$ such that $f(x + t) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$ and *almost periodic*, if for every $\varepsilon > 0$ there exists $t > 0$ such that $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x + t) - f(x)| < \varepsilon$. Let $P, A, B, C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ denote the subsets of all periodic, almost periodic, bounded, and continuous functions, respectively. Consider the set $\mathcal{S}$, whose elements are the sets P, A, B, C along with all possible intersections of them. Clearly $\mathcal{S}$ contains at most $2^4 - 1 = 15$ elements. Prove that $\mathcal{S}$ contains exactly 10 elements.

5. A set $M \subset \mathbb{R}^2$ is symmetric with respect to every straight line, which passes some 2 of its points. Prove that M either lies on some straight line or is everywhere dense in $\mathbb{R}^2$.

6. Let $n \in \mathbb{N}$. Matrices $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ are said to commute if $AB = BA$. Consider matrices $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ which commute with each other. Prove that there exist three real numbers a, b, c such that $|a| + |b| + |c| > 0$ and $|aA + bB + cC| = 0$.

Vihjed

1. Esimeseks sammuks proovi näidata, et $\ln f(x) \sim \ln x$ protsessis $x \to \infty$.
2. Arvuta determinant modulo mõni algarv.
3. Diferentseeri rida $\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$ kaks korda.
4. Siin peab tekitama mitu funktsioonide näidet, mille alusel võib väita, et vastavad funktsioonide klassid on erinevad.

   On kasulik vaadelda ka ühtlaselt pidevaid funktsioone, mis on alati peaaegu perioodilised.
5. Leia hulgas M romb, tema põhjal leia ristkülik, tekita võrk, leia palju väiksem romb.
6. Tõesta, et leidub ühine omavektor, 3 vastavat (komplekset) omaväärtust on $\mathbb{R}$-lineaarselt sõltuvad.

Solutions

1. Kuna $f(x) \sim x \ln x$ protsessis $x \to \infty$, siis $\ln f(x) \sim \ln(x \ln x) = \ln x + \ln\ln x \sim \ln x$ (sest üldiselt kui $f(x) \sim g(x)$, siis $\ln(\frac{f(x)}{g(x)}) = \ln(f(x)) - \ln(g(x)) \to 0$, kust $\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} \to 1$; NB! Siin ei saa asendada ln suvalise pideva lõpmatuseni kasvava funktsiooniga). Seega $f(x) \sim x \ln f(x)$ ehk $\frac{f(x)}{\ln f(x)} \sim x$.

   Tähistades $x = f^{-1}(y)$, saame et $f^{-1}(y) \sim \frac{y}{\ln y}$ protsessis $y \to \infty$, sest f on rangelt kasvav.

2. Arvutame determinanti modulo 5. Saame

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1+4) \equiv 1 \not\equiv 0.$$

3. Diferentseerime rida $\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$ kaks korda (seda võib teha vahemikus $x \in (-1,1)$). Saame

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3n(3n-1)x^{3n-2} = \frac{6x(1+2x^3)}{(1-x^3)^3}$$

   ehk

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(3n-1)x^{3n} = \frac{2x^3(1+2x^3)}{(1-x^3)^3}.$$

   Võttes $x = 3^{-\frac{1}{3}}$, saame paremal poolel vastuseks $\frac{15}{4}$.

4. Näitame, et $|\mathcal{S}| \leq 10$. Ilmselt $P \subset A$, mistõttu kõik ühisosad, kus esineb $P \cap A$ tegelikult ühtivad vastavate ühisosadega, kus esineb ainult P. Neid on täpselt 4 tükki. Seega $|\mathcal{S}| \leq 11$. Iga pidev ja perioodiline funktsioon on pidev igas lõigus, mille pikkus on suurem kui funktsiooni periood. Seega ta on tõkestatud selles lõigus ning järelikult tõkestatud ka kogu reaalteljel. Tõestasime, et $P \cap C = P \cap C \cap B$. Seega $|\mathcal{S}| \leq 10$.

   Nüüd näitame, et kõik ülejäänud klassid on erinevad. Mainime kohe, et ühtlaselt pidev funktsioon on ilmselt peaaegu perioodiline.

$$\begin{tikzcd}
 & P \cap C = P \cap C \cap B \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
 & P \cap B \arrow[dl] \arrow[d] & A \cap B \cap C \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
P \arrow[dr] & A \cap B \arrow[d] \arrow[dr] & A \cap C \arrow[dl] \arrow[dr] & B \cap C \arrow[dl] \arrow[d] \\
 & A & B & C
\end{tikzcd}$$

$B \cap P \cap C < P \cap B$:

$B \cap C < B$:

$B \cap C \cap A < B \cap A$:

$C \cap A < A$: Ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$ karateristlik funktsioon $\chi_{\mathbb{Q}}$.

$P \cap B < P$: $f(x) = \frac{1}{(x-[x])}$, kui $x \neq [x]$ ja $f(x) = 1$ muidu ($[x]$ on täisosa).

$P < A$:

$B \cap C < C$:

$B \cap A < A$:

$B \cap C \cap A < C \cap A$: $f(x) = x$.

$P \cap C < B \cap C \cap A$:

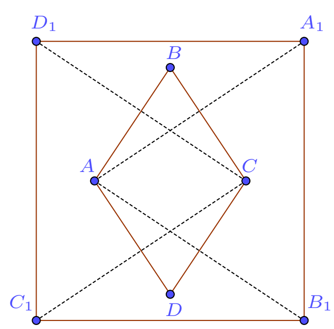
$P \cap B < B \cap A$: $f(x) = 1 + x$, kui $x \in [-1, 0]$, $f(x) = 1 - x$, kui $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$ muidu.

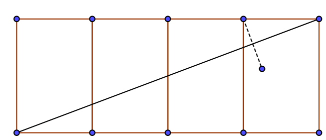
$C \cap A < C$: $f(x) = \ln(x)$, kui x on piisavalt suur, $f(x) = 0$ muidu: $|f(2t) - f(t)| = \ln 2$.

$B \cap A < B$: $f(x) = \mathrm{sign}(x)$.

$B \cap C \cap A < B \cap C$: Arendame eelmist näidet. Kasutame pidevaid sammusid kuitahes väikeste pikkustega. Olgu funktsioon konstantselt 1 poollõigul $(-\infty, 1]$. Seejärel teeme pideva sammu 1 pealt -1 peale pikkusega $1/n$ (alustame hetkel $n = 1$). Seejärel lõigul pikkusega n olgu funktsioon jälle konstantne. Siis jälle pidev samm -1 pealt 1 peale pikkusega $1/(n+1)$ ning seejärel funktsioon konstantne lõigul pikkusega $n + 1$. Niimoodi saame jätkata lõpmatuseni, kusjuures $n \to \infty$. Suvalise $t > 0$ korral leidub n nii, et $1/n < t < n$. Võttes arvuks x pideva sammu alguspunkti, kus selle sammu pikkus on $1/n$, saame, et $|f(x + t) - f(x)| = 2$.

5. Kui M ei ole ühe sirge peal, siis leiduvad kolm punkti, mis ei asu ühel sirgel. Vähemalt kahe peegeldusega saab siis tekitada rombi. Seejärel rombis $ABCD$ saab peegeldada punkti A sirgete BC ja CD suhtes ning punkti C sirgete AB ja AD suhtes. Saadud punktid A_1, B_1, C_1, D_1 moodustavad ristküliku, kusjuures selle ristküliku külgede pikkused ei ületa $5d$, kus $d = |AC|$ on diagonaali pikkus. Tõepoolest, nt $|B_1C_1| \leq |CC_1| + |AC| + |AB_1| \leq 2d + d + 2d = 5d$, sest ilmselt $|CC_1| \leq 2d$. Saadud ristküliku saab peegeldada tema külgede suhtes. Nii saame katta tasandi ühtlase võrguga. Võrgus aga saame valida diagonaali ja punkti, mis on kuitahes lähedane selle diagonaalini. Nii saame konstrueerida rombi kuitahes väikese diagonaaliga ning selle rombi alusel jälle võrku kuitahes väikestest ristkülikutest, nagu vaja.





6. Kui üks meie maatriksitest on singulaarne, siis ilmselt vastav kolmik leidub. Eeldame, et nad on regulaarsed.

   Tõestame, et leidub ühine omavektor. Olgu λ_1 maatriksi A mingi (kompleksne) omaväärtus ja V_1 vastav omavektorite alamruum (ruumis $\mathbb{C}^n$). Siis $B(V_1) \subset V_1$. Tõepoolest, kui $x \in V_1$, siis $A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda_1 x) = \lambda_1 Bx$, mistõttu $Bx \in V_1$. Seega lineaarsel operaatoril $B|_{V_1}$ (mis on regulaarne

B regulaarsuse tõttu) omakorda leidub omaväärtus λ_2 ning vastav omavektorite alamruum $V_2 \subset V_1$. Analoogiliselt saame, et $C(V_2) \subset V_2$ ning operaatoril $C|_{V_3}$ leidub mingi omaväärtus λ_3 ja vastav nullist erinev omavektor $x \in V_3 \subset V_2 \subset V_1$.

Vaatleme komplekseid omaväärtusi λ_i kui vektoreid ruumis $\mathbb{R}^2$. Nad on kindlasti lineaarselt sõltuvad ning seega leidub kolmik $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ nii, et $a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 = 0$. Nüüd

$$(aA + bB + cC)(x) = (a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3)x = 0,$$

mis näitabki, et maatriks $aA + bB + cC$ on singulaarne.