Matemaatikavõistlus

Tartu, 08.03.2024

1. Defineerime iga $z \in \mathbb{C}$ korral maatriksi $A(z) \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ järgmise valemiga:

$$A(z) = \begin{pmatrix} 4z^2 & 1 & -1 \\ -1 & 2z^2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Mitu erinevat sellist z väärtust leidub, et $|z| < 1$ ning $A(z)$ ei ole pööratav?

2. Olgu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferentseeruv lahtises ühikringis $D = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 < 1\}$ ning kehtigu $f(0, 0) = 0$. Tõestage, et iga punkti $(x, y) \in D$ korral kehtib võrdus

$$f(x, y) = x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(xt, yt)\,\mathrm{d}t + y \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xt, yt)\,\mathrm{d}t.$$

   Märkus. Osatuletised defineeritakse valemitega $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$ ning $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$.

3. Tehke kindlaks, kas rida

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \ldots$$

   on koonduv või hajuv.

4. Olgu $(R, +, \cdot)$ lõplik ring. Tõestage, et leiduvad positiivsed täisarvud m ja n nii, et $m > n$ ning

$$\forall x \in R \qquad x^m = x^n.$$

5. Olgu iga $n \in \mathbb{N}$ korral $a_n > 0$ ning olgu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Tähistame arvrea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ osasummade jada sümboliga (S_n).

   (a) Tõestage, et rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ on hajuv.

   (b) Tõestage, et rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ on koonduv.

Math Competition

Tartu, 08.03.2024

1. For every complex number z define a matrix $A(z) \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ as follows:

$$A(z) = \begin{pmatrix} 4z^2 & 1 & -1 \\ -1 & 2z^2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   How many different values of z does there exist such that $|z| < 1$ and $A(z)$ is not invertible?

2. Let a function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be differentiable in the open unit disc $D = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 < 1\}$ and let us have $f(0, 0) = 0$. Prove that for every point $(x, y) \in D$ the following equality

$$f(x, y) = x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(xt, yt)\,\mathrm{d}t + y \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xt, yt)\,\mathrm{d}t.$$

   holds.

   Remark. The partial derivatives are defined as $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$.

3. Is the series

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \ldots$$

   convergent or divergent?

4. Let $(R, +, \cdot)$ be a finite ring. Prove that there exist positive integers m and n such that $m > n$ and

$$\forall x \in R \qquad x^m = x^n.$$

5. Assume that for every $n \in \mathbb{N}$ there holds $a_n > 0$. Let $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Denote the sequence of partial sums of the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ by (S_n).

   (a) Prove that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ is divergent.

   (b) Prove that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ is convergent.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Maatriks pole pööratav parajasti siis, kui determinant on 0. Saame, et
$$\det A(z) = 8z^4 + 6z^2 + 1.$$
Seega tuleb lahendada küsimus, mitu juurt on polünoomil $\det A$ ühikringis.

   Polünoom $\det A$ on biruutpolünoom, seetõttu saame leida selle juured täpselt. Tähistades $z^2 = u$, leiame, et
$$8u^2 + 6u + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{-3 \pm 1}{8} \in \left\{ -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right\}.$$
Mõlema u väärtuse ruutjuured jäävad ühikringi sisse, nad on $\pm \frac{\mathrm{i}}{2}, \pm \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

   Järelikult on ülesandes otsitavaid z erinevaid väärtusi 4 tükki.

   Lahendus 2. Alustame analoogiliselt eelmise lahendusega; leiame, et vaja on uurida polünoomi $\det A$ selliste juurte arvu, mis jäävad ühikringi sisse. Kuna polünoomil $p(z) = 8z^4$ on ühikringis 4 juurt ning ühikringjoonel $|z| = 1$ kehtib
$$|8z^4| = 8|z|^4 = 8 > 7 \geqslant |6z^2 + 1|,$$
siis vastavalt Rouché teoreemile on ka polünoomide p ja $6z^2 + 1$ summal ehk polünoomil $\det A$ neli juurt ühikringis.

   Et
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\det A(z)) = z(32z^2 + 12)$$
ja selle polünoomi juured on
$$0, \quad \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{8}},$$
millest ükski pole $\det A(z)$ juur, siis $\det A(z)$ juurtest ükski pole kordne juur. Järelikult on ülesandes otsitavaid z erinevaid väärtusi 4 tükki.

   Märkus. Kuigi lahendus 2 kasutab täiendavat tööriista (Rouché teoreem polünoomi $f + g$ juurte määramiseks sellises piirkonnas, mille rajal f domineerib), on ta selles mõttes üldisem, et ei vajata juurte endi väljaarvutamist.

2. Vaatame funktsiooni $g(x, y, t) = f(xt, yt)$. Funktsioon g on diferentseeruv, sest ta on diferentseeruvate funktsioonide kompositsioon. Vastavalt ahelareeglile
$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, y, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(xt, yt) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(xt, yt) \cdot y.$$
Võttes võrduse pooltest integraali $\int\limits_0^1$ muutuja t järgi, on paremal täpselt tegu uuritava võrduse parema poolega (sest x ja y on konstandid t seisukohast). Seega peame tõestama, et
$$\int\limits_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(x, y, t) \, \mathrm{d}t = f(x, y).$$

See võrdus aga kehtib, sest funktsiooni $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,y,t)$ algfunktsioon on g ja järelikult Newton–Leibnizi valemi põhjal

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(x,y,t)\,\mathrm{d}t = g(x,y,1) - g(x,y,0) = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y).$$

3. *Vastus.* Koonduv.

Lahendus 1. Tähistame $f(x) = \sqrt{2+x}$, $a_0 = 0$ ja $a_n = f(a_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$. Nüüd on võimalik uuritav rida ümber kirjutada kujule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{f(2) - f(a_n)}. \tag{1}$$

Näitame, et rida (1) on koonduv, sest teda majoreerib koonduv geomeetriline rida (I võrdluslause). Täpsemalt, tõestame, et

$$\sqrt{f(2) - f(a_n)} \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \cdot (2 - \sqrt{2}), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Võrratuse (2) tõestame matemaatilise induktsiooni teel. Baasi kontroll on vahetu. Sammu läbiviimiseks kasutame Lagrange'i keskväärtusteoreemi funktsiooni f jaoks lõigus otspunktidega 2 ja a_n. Arvestame, et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$ ning $0 \leqslant a_n < 2$ iga n korral. Viimase hinnangu saab omakorda tõestada induktiivselt: kui $a_{n-1} < 2$, siis $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{4} = 2$.

Lagrange'i keskväärtusteoreem funktsiooni f jaoks lõigus $[a_n, 2]$ annab punkti $c_n \in (a_n, 2)$ nii, et

$$\sqrt{f(2) - f(a_n)} = \sqrt{f'(c_n)} \cdot \sqrt{2 - a_n} = \frac{1}{2\sqrt{2 + c_n}} \cdot \sqrt{f(2) - f(a_{n-1})} <$$
$$< \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{f(2) - f(a_{n-1})}.$$

Eeldades, et

$$\sqrt{f(2) - f(a_{n-1})} \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot (2 - \sqrt{2}),$$

annab saadud tulemus sammu teostamisel ühe teguri $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ juurde.

Kuna $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < 1$, siis rida liikmetega $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \cdot (2 - \sqrt{2})$ on koonduv. Järelikult on võrratuse (2) tõttu koonduv ka uuritav rida.

Lahendus 2. Paneme tähele, et

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}},$$
$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}},$$
$$\sin\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Üldiselt, kui teame, et

$$\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ juuremärki}},$$
$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ juuremärki}},$$

siis

$$\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ juuremärki}}}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n+1\text{ juuremärki}},$$

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ juuremärki}}}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n+1\text{ juuremärki}}.$$

Matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal on uuritav rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Kuna protsessis $k\to\infty$ kehtib $\lim\limits_{k}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\frac{\pi}{2^{k+1}}} = 1$ ning rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^{k+1}}$ on koonduv (sest ta on geomeetriline rida), siis mittenegatiivsete liikmetega ridade II võrdluslause kohaselt on koonduv ka uuritav rida.

4. Olgu ringi R elementide arv k ning $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$. Vaatleme otsekorrutist

$$S = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{k \text{ otsetegurit}}.$$

Vahetu kontroll näitab, et S on samuti ring komponendiviisiliste tehete suhtes.

Tähistame $\alpha = (r_1, \ldots, r_k) \in S$ ning vaatleme elementide jada $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ Kuna S on samuti lõplik ring, peab Dirichlet' printsiibi kohaselt leiduma selles jadas kaks võrdset elementi: $\alpha^n = \alpha^m$. Nüüd samasugune võrdus kehtib ka koordinaatide kaupa: $r_i^n = r_i^m$, kus $1 \leqslant i \leqslant k$.

5. (a) Paneme tähele, et kõigi positiivsete täisarvude n ja p korral

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geqslant \frac{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}.$$

Kuna $\lim\limits_{p \to \infty} \dfrac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1$, kehtib iga n ja piisavalt suure $p = p(n)$ korral

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} > \frac{1}{2}.$$

Järelikult rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ osasummade jada pole Cauchy jada, mistõttu rida on hajuv.

(b) Paneme tähele, et kui $n > 1$, siis

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \frac{a_n}{S_n S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

Seega, kui n ja p on suvalised positiivsed täisarvud, siis

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} \right) = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+p}} < \frac{1}{S_n}.$$

Et $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{S_n} = 0$ (sest ülesande tingimuste kohaselt $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$), siis Cauchy kriteeriumi kohaselt on rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ koonduv.