# Matemaatika treeningvõistlus

Tartu, 11.03.2022

1. Olgu antud $n+1$ erinevat positiivset täisarvu $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, millest ükski ei ületa arvu $2n$. Tõestage, et arvude $a_1, \ldots, a_{n+1}$ seas leiduvad kaks arvu nii, et üks neist jagub teisega.

2. Vaatleme väiteid:

   (A$_1$) $\quad \lim_n n(a_{n+1} - a_n) =: a \in \mathbb{R}$,

   (A$_2$) $\quad \lim_n \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} =: b \in \mathbb{R}$,

   (A$_3$) $\quad \lim_n a_n \in \mathbb{R}$.

   Millised alljärgnevatest implikatsioonidest on tõesed suvalise arvjada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ korral?

   (a) (A$_1$) $\Rightarrow$ (A$_3$),

   (b) (A$_2$) $\Rightarrow$ (A$_3$),

   (c) (A$_1$)$\wedge$(A$_2$) $\Rightarrow$ (A$_3$).

3. Vaatleme polünoomi $p = X^{47} - X^{23} + 2X^{11} - X^5 + 4X^2 + 1$. Tõestage, et polünoomil $p \in \mathbb{C}[X]$ on vähemalt üks juur lahtises ühikringis, see tähendab, juur $z \in \mathbb{C}$ selline, et $|z| < 1$.

4. Olgu $A$ sümmeetriline $n \times n$ reaalarvmaatriks, kusjuures kehtigu

   $$A^5 + A^3 + A = 3E,$$

   kus $E$ on $n$-järku ühikmaatriks.

   Tõestage, et $A = E$.

5. Leidke integraal

   $$\int_0^{\pi} \frac{\cos 4t}{1 + (\cos t)^2} \, \mathrm{d}t.$$

# Math Competition

Tartu, 11.03.2022

1. Let us have $n+1$ different positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, none of which exceeds $2n$. Prove that there are two integers among $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ such that one of them divides the other.

2. Consider the following propositions:

   (A$_1$) $\quad \lim\limits_n n(a_{n+1} - a_n) =: a \in \mathbb{R}$,

   (A$_2$) $\quad \lim\limits_n \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} =: b \in \mathbb{R}$,

   (A$_3$) $\quad \lim\limits_n a_n \in \mathbb{R}$.

   Which of the following implications hold for any sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$?

   (a) (A$_1$) $\Rightarrow$ (A$_3$),

   (b) (A$_2$) $\Rightarrow$ (A$_3$),

   (c) (A$_1$)$\wedge$(A$_2$) $\Rightarrow$ (A$_3$).

3. Consider the polynomial $p = X^{47} - X^{23} + 2X^{11} - X^5 + 4X^2 + 1$. Prove that the polynomial $p \in \mathbb{C}[X]$ has at least one root in the open unit disc, i.e., a root $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| < 1$.

4. Let $A$ be a symmetric real $n \times n$ matrix such that

   $$A^5 + A^3 + A = 3E,$$

   where $E$ is $n$-th order identity matrix.

   Prove that $A = E$.

5. Find the value of the following integral:

   $$\int_0^{\pi} \frac{\cos 4t}{1 + (\cos t)^2} \, \mathrm{d}t.$$

## Lahendused

1. Esitame kõik arvud kujul $a_k = 2^{s_k} b_k$, kus arvud $b_1, \ldots, b_{n+1}$ on paaritud. Hulk $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ on alamhulk hulgas $\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$, kus on $n$ elementi. Dirichlet' printsiibi kohaselt on mingid kaks arvu $a_i$ ja $a_j$ sellised, et $b_i = b_j$. Nüüd üks (suurem) arvudest $a_i$ ja $a_j$ jagub teisega, sest nad erinevad ainult teguri 2 astme poolest.

2. (a) Implikatsioon üldiselt ei kehti. Kontranäiteks sobib $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Nüüd $n \cdot (a_{n+1} - a_n) = n \cdot \frac{1}{n+1} \to 1$, aga jada $(a_n)$ on harmoonilise rea osasummade jada, mis on hajuv.

   (b) Implikatsioon üldiselt ei kehti. Kontranäiteks sobib jada $a_n = (-1)^n$. Nüüd aritmeetiliste keskmiste jada on $-1, 0, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{5}, \ldots$, seega jääb kahe hääbuva jada liikme ($-\frac{1}{n}$ ja 0) vahele. Keskmise muutuja omaduse tõttu $\lim\limits_n \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = 0$. Ent jada $((-1)^n)$ on hajuv, kuna tema ülemine ja alumine piirväärtus on erinevad ($-1$ ja 1).

   (c) Implikatsioon kehtib. Nimelt, tähistame $b_n = n(a_{n+1} - a_n)$. Vastavalt Cauchy piirväärtusteoreemile koondub jada $(b_n)$ aritmeetiliste keskmiste jada samaks piirväärtuseks $a$. Niisiis

   $$\frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} = \frac{a_2 - a_1 + 2(a_3 - a_2) + \ldots + n(a_{n+1} - a_n)}{n} \to a.$$

   Ent sellise jada liige on

   $$\frac{a_2 - a_1 + 2(a_3 - a_2) + 3(a_4 - a_3) + \ldots + n(a_{n+1} - a_n)}{n} = \frac{-a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n + na_{n+1}}{n} = \\ = -\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + a_{n+1}.$$

   Oleme saanud, et

   $$-\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + a_{n+1} \to a,$$

   millest eelduse ($A_2$) tõttu $a_{n+1} \to a + b$.

3. *Lahendus 1.* Polünoom $p$ on taandatud, seega vastavalt Viète'i valemitele tema kõigi (sh. komplekssete) juurte korrutis on 1 (sest vabaliige on 1).

   Oletame väitevastaselt, et polünoomil $p$ pole ühtki kompleksset juurt $z$, mis rahuldaks tingimust $|z| < 1$. Et juurte korrutis on 1, ei tohi nüüd ühegi juure moodul olla ka 1-st suurem. Seega kõik juured on mooduliga 1 ehk asuvad komplekstasandi ühikringjoonel.

   See on aga juba võimatu. Nimelt, polünoom $p$ on paarituastmeline reaalsete kordajatega polünoom. Sellisel polünoomil on kindlasti vähemalt üks reaalarvuline juur, kuna polünoomfunktsioon $\mathbb{R} \ni x \mapsto p(x) \in \mathbb{R}$ omandab piiril $-\infty$ ja $\infty$ eripidi märkidega lõpmatu piirväärtuse. Et $x \mapsto p(x)$ on ka pidev funktsioon, on siin võimalik Bolzano–Cauchy teoreemi nullkohast rakendades leida, et funktsioonil $x \mapsto p(x)$ leidub vähemalt üks nullkoht.

   Ent 1 ja $-1$ ei ole kumbki polünoomi $p$ juurteks, kuna $p(1) = 6$ ja $p(-1) = 4$. Seega on polünoomil $p$ mingi muu (reaalarvuline) juur, mis siiski ei asu ühikringjoonel. Saadud vastuolu näitab, et polünoomil $p$ on siiski juur $z \in \mathbb{C}$ nii, et $|z| < 1$.

   *Lahendus 2.* Vaatleme ringjoont $|z| = \frac{3}{4}$. Saame, et kui $|z| = \frac{3}{4}$, siis

   $$|z^{47} - z^{23} + 2z^{11} - z^5 + 1| \leqslant |z|^{47} + |z|^{23} + 2|z|^{11} + |z|^5 + 1 < 4|z|^6 + |z|^5 + 1 = \\ = \frac{3^6}{4^5} + \frac{3^5}{4^5} + 1 = \frac{3^5}{4^4} + 1 = \frac{243}{256} + 1 < \\ < 2.$$

Samas

$$|4z^2| = \frac{9}{4} > 2.$$

Kuna polünoomil $4X^2$ on täpselt kaks juurt, mis asuvad ringis $|z| < \frac{3}{4}$, on Rouché teoreemi kohaselt ka polünoomil $p$ täpselt kaks juurt, mis asuvad selles ringis.

4. Vaatleme polünoomi

$$p = X^5 + X^3 + X - 3.$$

Kuna $p(A) = \Theta$ (nullmaatriks), siis maatriksi $A$ minimaalne polünoom $q$ on polünoomi $p$ tegur. Tõepoolest, $A$ minimaalne polünoom $q$ on minimaalse astmega polünoom nii, et maatriks $A$ on polünoomi $q$ juur. Teostades nüüd jäägiga jagamise $p = q \cdot q_1 + r$, on kas $\deg r < \deg q$ või $r = 0$. Samas saame, et $p(A) = q(A) \cdot q_1(A) + r(A)$, mistõttu ka $r(A) = \Theta$. Nüüd on ainus võimalus, et $r = 0$, vastasel korral tuleks vastuolu polünoomi $q$ minimaalsusega. Muuhulgas saame siit, et $q$ kõik juured (võib-olla kompleksarvulised) on ühtlasi $p$ juured.

Teiselt poolt, Cayley–Hamiltoni teoreemi kohaselt on $q$ ka maatriksi $A$ karakteristliku polünoomi tegur (teisiti öeldes, maatriks rahuldab oma karakteristlikku võrrandit). Niisiis polünoomi $q$ kõik (võib-olla kompleksarvulised) juured on ka maatriksi $A$ karakteristlikud juured.

Kuna $A$ on sümmeetriline maatriks, on tema kõik karakteristlikud juured reaalsed. Järelikult on ka kõik $q$ juured reaalsed. Järelikult $q$ kõik juured esinevad $p$ reaalsete juurte seas.

Uurime, millised on polünoomi $p$ reaalsed juured. Saame, et $p' = 5X^4 + 3X^2 + 1$. Kuna funktsioon $p'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on positiivne kogu reaalteljel, on funktsioon $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rangelt kasvav ja polünoomil $p$ on täpselt üks reaalne juur. Vahetu kontroll näitab, et $x = 1$ on polünoomi $p$ juur. Ta on $p$ ühekordne juur, sest ta pole $p'$ juur.

Järelikult $q = X - 1$ (ning $A$ karakteristlik polünoom on $X - 1$ mingi aste). Et $q(A) = \Theta$, siis $A - E = \Theta$ ehk $A = E$.

5. *Lahendus 1.* Kuna

$$\cos 4t = 2(\cos 2t)^2 - 1 = 2(2(\cos t)^2 - 1)^2 - 1 = 8(\cos t)^4 - 8(\cos t)^2 + 1,$$

siis integrand on $U = (\cos t)^2$ suhtes ratsionaalmurd

$$\frac{8U^2 - 8U + 1}{1 + U} = 8U - 16 + \frac{17}{1 + U}.$$

Integreerime iga liidetava eraldi, kõik on võrdlemisi standardsed integraalid. Saame, et

$$\int_0^\pi 8(\cos t)^2 \, \mathrm{d}t = 4 \int_0^\pi (1 + \cos 2t) \, \mathrm{d}t = 4\pi,$$
$$\int_0^\pi (-16) \, \mathrm{d}t = -16\pi.$$

Kolmanda integraali

$$\int_0^\pi \frac{17 \, \mathrm{d}t}{1 + (\cos t)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{17 \, \mathrm{d}t}{1 + (\cos t)^2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{17 \, \mathrm{d}t}{1 + (\cos t)^2}$$

leidmiseks teeme muutujavahetuse $v = \tan t$, siis $(\cos t)^2 = \frac{1}{1 + v^2}$ ning $\mathrm{d}v = (1 + v^2)\mathrm{d}t$, mistõttu $\frac{\mathrm{d}t}{1 + (\cos t)^2} = \frac{\mathrm{d}v}{2 + v^2}$.

Kumbki integraal tuleb formaalselt leida eraldi, sest $t = 0 \dots \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = 0 \dots \infty$ ning $t = \frac{\pi}{2} \dots \pi \Rightarrow v = -\infty \dots 0$. Kuna $\int \frac{\mathrm{d}v}{2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{v}{\sqrt{2}} + C$, siis kokkuvõttes

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{17\,\mathrm{d}t}{1+(\cos t)^2} &= 17 \lim_{V\to\infty} \int_0^V \frac{\mathrm{d}v}{2+v^2} + 17 \lim_{V\to-\infty} \int_V^0 \frac{\mathrm{d}v}{2+v^2} = \\ &= \frac{17}{\sqrt{2}} \lim_{V\to\infty} \left(\arctan\frac{V}{\sqrt{2}} - \arctan 0\right) + \frac{17}{\sqrt{2}} \lim_{V\to-\infty} \left(\arctan 0 - \arctan\frac{V}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{17\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Niisiis

$$\int_0^\pi \frac{\cos 4t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 4\pi - 16\pi + \frac{17\pi}{\sqrt{2}} = \pi \cdot \left(\frac{17}{\sqrt{2}} - 12\right).$$

*Lahendus 2.* Saame, et

$$\int_0^\pi \frac{\cos 4t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\operatorname{Re} \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}{1+(\cos t)^2}\right)\mathrm{d}t = \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}{1+\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Kuna

$$1 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^2 = \frac{4+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{4} = \frac{6+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{4},$$

siis

$$\int_0^\pi \frac{\cos 4t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 4 \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}{6+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t.$$

Teeme muutuja vahetuse $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} = z$, siis reaalmuutuja $t$ rajad 0 kuni $\pi$ annavad kompleksmuutuja $z$ järgi integreerimise üle komplekstasandi ühikringjoone vastupäeva. Arvestama peame, et $\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\right) = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}z\,\mathrm{d}t$, mistõttu saame, et

$$\int_0^\pi \frac{\cos 4t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 4 \operatorname{Re} \int_{|z|=1} \frac{z^2}{6+z+\frac{1}{z}} \frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z} = 2 \operatorname{Re} \int_{|z|=1} \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{z^2}{z^2+6z+1}\,\mathrm{d}z.$$

Nimetaja $z^2+6z+1$ nullkohad on $-3 \pm \sqrt{8}$, millest $z_0 = -3+\sqrt{8}$ jääb ühikringi sisse, teine jääb välja. Järelikult on funktsioonil $f(z) = \frac{z^3}{\mathrm{i}\cdot(z^2+6z+1)}$ punktis $z_0$ esimest järku poolus.

Resiidide teooria põhiteoreemi (integraal üle kinnise kontuuri võrdub kontuuri sisepiirkonda jäävate resiidide summaga, mida on korrutatud teguriga $2\pi\mathrm{i}$) kohaselt

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2}{\mathrm{i}\cdot(z^2+6z+1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}(f(z), z_0) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{z_0^2}{\mathrm{i}(2z_0+6)} = 2\pi \cdot \frac{9-6\sqrt{8}+8}{-6+2\sqrt{8}+6} = 2\pi \cdot \frac{17-12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}.$$

Kokkuvõttes

$$\int_0^\pi \frac{\cos 4t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 2 \operatorname{Re} \int_{|z|=1} \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{z^2}{z^2+6z+1}\,\mathrm{d}z = \pi \cdot \left(\frac{17}{\sqrt{2}} - 12\right).$$

*Lahendusidee 3.* (Nii ei ole soovitav lahendada, kuna arvutit pole käepärast!)

Teostame funktsiooni $f(t) = \frac{\cos 4t}{1+(\cos t)^2}$ avaldises muutujavahetuse $u = \tan\frac{t}{2}$. (Sellisel juhul $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.)

Lugejas on

$$\cos 4t = 2(\cos 2t)^2 - 1 = 2(2(\cos t)^2 - 1)^2 - 1 = 8(\cos t)^4 - 8(\cos t)^2 + 1 =$$
$$= 8\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^4 - 8\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2 + 1 = \frac{u^8 - 28u^6 + 70u^4 - 28u^2 + 1}{(1+u^2)^4}$$

Nimetajas

$$1 + (\cos t)^2 = 1 + \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2 = \frac{2(1+u^4)}{(1+u^2)^2}.$$

Lisaks

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\left(\tan\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \left(\tan\frac{t}{2}\right)^2\right)\mathrm{d}t,$$

mistõttu

$$\mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

Rajad $0\ldots\pi$ muutuvad rajadeks $0\ldots\infty$.

Kokkuvõttes leiame, et

$$\int_0^\pi \frac{\cos 4t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{u^8 - 28u^6 + 70u^4 - 28u^2 + 1}{(1+u^2)^4}\cdot\frac{(1+u^2)^2}{2(1+u^4)}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^\infty \frac{(u^8 - 28u^6 + 70u^4 - 28u^2 + 1)(1+u^2)}{(1+u^2)^4(1+u^4)}\mathrm{d}u$$

Integraali all on ratsionaalmurd (lihtmurd). Kuna

$$1 + u^4 = (1 + 2u^2 + u^4) - 2u^2 = (1+u^2)^2 - (\sqrt{2}u)^2 = (1 - \sqrt{2}u + u^2)(1 + \sqrt{2}u + u^2),$$

siis nimetajas olevad taandumatud tegurid on $1+u^2$, $1-\sqrt{2}u+u^2$ ja $1+\sqrt{2}u+u^2$.

Tuleb leida integrandi esitus algmurdude summana ning integreerida kõik algmurrud. Tülikas on see, et tekivad algmurrud, mille kõrgeim aste on $(1+u^2)^4$ ning selliste murdude integreerimine on tüüpiliselt järkjärguline ositi integreerimine.