Matemaatika treeningvõistlus

Tartu, 19.03.2021

1. Olgu (a_n) mittenegatiivsete reaalarvude jada. Tähistame

$$x_n := \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}},$$

kus parempoolses avaldises on n juuremärki; näiteks $x_1 = \sqrt{a_1}$ ja $x_4 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{a_4}}}}$.

   (a) Juhul, kui $a_n = a > 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, leia piirväärtus $\lim x_n$,

   (b) juhul, kui $a_n > 1$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja $\lim \frac{1}{n} \ln(\ln a_n) < \ln 2$, tõesta, et leidub lõplik piirväärtus $\lim x_n$.

2. Mitme positiivse täisarvu $n < 10^{2021}$ korral $n^2 - n$ jagub arvuga 10^{2021}?

3. Olgu G lõplik rühm. Iga $x \in G$ korral tähistame $N_x = \{y \in G \mid yx = xy\}$ ja $K_x = \{y^{-1}xy \mid y \in G\}$. Tõesta, et

   (a) $|G| = |K_x| \cdot |N_x|$ iga $x \in G$ korral,

   (b) kui $|G| = 121$, siis leiduvad $g, h \in G$ nii, et $g \neq h$ ja $N_g = N_h = G$.

4. Milliste $d \geq 2$ jaoks leidub kasvav funktsioon $f\colon [0, \infty) \to (0, \infty)$ nii, et

$$\int_0^y f(x)^2 dx \geq \left(\int_0^y f(x) dx \right)^d$$

iga $y > 0$ korral?

5. Olgu $P(x)$ reaalkordajatega polünoom, kusjuures $P(x) \geq 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Tõesta, et leiduvad reaalkordajatega polünoomid $Q(x)$ ja $R(x)$ nii, et $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

Math Competition

Tartu, 19.03.2021

1. Let (a_n) be a sequence of non-negative real numbers. Denote
$$x_n := \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}},$$
where there are n square root operations; e.g., $x_1 = \sqrt{a_1}$ and $x_4 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{a_4}}}}$.
   (a) In case, when $a_n = a > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, find $\lim x_n$,
   (b) in case, when $a_n > 1$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\lim \frac{1}{n} \ln(\ln a_n) < \ln 2$, prove that $\lim x_n$ exists and is finite.
2. For how many positive integers $n < 10^{2021}$ it is true that $n^2 - n$ is divided by 10^{2021}?
3. Let G be a finite group. For all $x \in G$ denote $N_x = \{y \in G \mid yx = xy\}$ and $K_x = \{y^{-1}xy \mid y \in G\}$. Prove that
   (a) $|G| = |K_x| \cdot |N_x|$ for all $x \in G$,
   (b) if $|G| = 121$, there there exist $g, h \in G$ such that $g \neq h$ and $N_g = N_h = G$.
4. For which $d \geq 2$ there exists an increasing function $f \colon [0, \infty) \to (0, \infty)$ such that
$$\int_0^y f(x)^2 dx \geq \left(\int_0^y f(x) dx \right)^d$$
for all $y > 0$?
5. Let $P(x)$ be a polynomial with real coefficients such that $P(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Prove that there exist polynomials $Q(x)$ and $R(x)$ with real coefficients such that $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Lahendused

1. Kuna mõlemal korral jada on rangelt kasvav, siis piirväärtuse olemasolu jaoks piisab näidata, et jada on ülalt tõkestatud.

   (a) Paneme tähele, et $x_{n+1}^2 = a + x_n$. Olgu c ruutvõrrandi $x^2 = a + x$ positiivne lahend ehk $c = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Siis $c > \sqrt{a} = x_1$. Seega $x_2^2 = a + x_1 < a + c = c^2$ ehk $x_2 < c$ jne tõttu saame, et $x_n < c$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seega leidub lõplik $x := \lim x_n$. Minnes esialgses rekurrentses võrrandis piirväärtusele saame, et $x^2 = a + x$ ehk $x = c$.

   (b) Eeldus ütleb, et $a_n < e^{2^n}$, kui n on piisavalt suur. Seega leidub mingisugune $a > 0$ nii, et $a_n < ae^{2^n}$ kõigi n korral. Nüüd $a_{n-1} + \sqrt{a_n} < ae^{2^{n-1}} + \sqrt{ae^{2^n}} = e^{2^{n-1}}(a + \sqrt{a})$. Jätkates edasi, saame, et $x_n < e(\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}) < ec$ (eelmise punkti tähistusega).

2. Tähistame $S_k = \{0 < n < 10^k \mid 10^k | n^2 - n\}$. Paneme tähele, et $S_1 = \{1, 5, 6\}$. Vaatame suvalist arvu $y = 10^k a + b \in S_{k+1}$, kus $0 \le a < 10$ ja $0 \le b < 10^k$. Siis $0 \equiv y^2 - y \equiv b^2 - b \pmod{10^k}$ ehk $b \in S_k$. Teisel poolt, kui $b \in S_k$, siis $10^k a + b \in S_{k+1}$ parajasti siis, kui

$$10^{2k}a^2 + 2ab \cdot 10^k + b^2 - 10^k a - b = n \cdot 10^{k+1}$$

   ehk (tähistades $b^2 - b = 10^k z$ mingi $z \in \mathbb{N}$ korral)

$$10^k a^2 + 2ab - a + z = n \cdot 10,$$

   kust $a(2b-1) \equiv z \pmod{10}$. On selge, et $2b - 1 \not\equiv 0$. Ka $2b - 1 \not\equiv 5$, sest $b \equiv 3$ on vastuolus võrdusega $b^2 - b \equiv 0$. Seega $2b - 1$ on pööratav ringis $\mathbb{Z}_{10}$ ja $a \equiv z(2b-1)^{-1}$ on üheselt määratud. Seetõttu hulgad S_{k+1} ja S_k on üksüheses vastavuses ning $|S_{k+1}| = |S_k| = |S_1| = 3$.

3. (a) Paneme tähele, et $a^{-1}xa = b^{-1}xb \iff ba^{-1}x = xba^{-1} \iff ba^{-1} \in N_x \iff b \in N_x \cdot a$. Olgu $|K_x| = m$ ja $a_1, \ldots, a_m$ sellised, et kõik $a_i^{-1}xa_i$ on paarikaupa erinevad. Siis hulgad $N_x \cdot a_i$ on paarikaupa ühisosata ning moodustavad rühma G klassijaotuse. Kuid $|N_x \cdot a_i| = |N_x|$, mistõttu $|G| = m|N_x|$.

   (b) On lihtne kontrollida, et $y \in K_x \iff x \in K_y \iff K_x = K_y$. Seega leiduvad $x_1, \ldots, x_n$ nii, et hulgad K_{x_i} on paarikaupa ühisosata ja moodustavad rühma G klassijaotuse. Seega $|G| = \sum_{i=1}^{n} |K_{x_i}|$. Eelmisest osast teame, et $|G| = 11^2$ jagub arvuga $|K_{x_i}|$, mistõttu $|K_{x_i}|$ on kas 1 või jagub arvuga 11. Tähistagu c nende indeksite i arv, mille korral $|K_{x_i}| = 1$ (paneme tähele, et see on samaväärne tingimusega $N_{x_i} = G$). Siis c samuti peab jaguma arvuga 11. Kuna $N_e = G$ ühikelemendi $e \in G$ korral, siis $c \ne 0$, kust $c \ge 11 \ge 2$, nagu vaja.

4. Juhul $d > 2$ paneme tähele, et

$$f(y)\int_0^y f(x)dx \ge \int_0^y f(x)^2 dx \ge \left(\int_0^y f(x)dx\right)^d,$$

   millest

$$f(y) \ge \left(\int_0^y f(x)dx\right)^{d-1}$$

   ehk $F'(y) \ge F(y)^{d-1}$, kus $F(y) = \int_0^y f(x)dx > 0$ on kasvav funktsioon. Saame, et $1 \le F'(y)F(y)^{1-d} = \frac{(F(y)^{2-d})'}{2-d}$ ehk $\left(\frac{1}{\alpha F(y)^\alpha}\right)' \le -1$, kus $\alpha = d - 2 > 0$. Seega $g'(y) \le -1$ igas punktis $y \in (0, \infty)$

mingi funktsiooni $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ korral. Seda ei saa olla, sest siis $g(b) - g(a) \leq a - b$, kust $g(b) \leq a + g(a) - b$, mistõttu $g(a + g(a)) \leq 0$.

Juhu $d = 2$ jaoks sobib funktsioon $f(x) = e^{e^{x+1}} e^{x+1}$. Tõepoolest, $\displaystyle\int_0^y f(x)dx = e^{e^{x+1}}\Big|_0^y = e^{e^{y+1}} - e^e$ ja

$$\int_0^y f(x)^2 dx = \int_0^y e^{2e^{x+1}} e^{2(x+1)} dx \geq \int_0^y e^{2e^{x+1}} 2e^{x+1} dx = e^{2e^{x+1}}\Big|_0^y = e^{2e^{y+1}} - e^{2e},$$

kus me kasutasime võrratuse $e^{2(x+1)} \geq e \cdot e^{x+1} \geq 2e^{x+1}$. Nõutud võrratus nüüd kehtib, kuna $a^2 - b^2 \geq (a-b)^2$, kui $a \geq b > 0$.

5. Paneme tähele, et

$$(Q_1^2 + R_1^2)(Q_2^2 + R_2^2) = (Q_1 Q_2 + R_1 R_2)^2 + (Q_1 R_2 - Q_2 R_1)^2.$$

Seega meil piisab esitada P sobivate polünoomide korrutisena. Olgu

$$P(x) = a \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{m} (x - z_j)(x - \bar{z}_j),$$

kus $a > 0$, $x_i \in \mathbb{R}$ ja $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Paneme tähele, et iga k_i on paarisarv, sest muidu $P(x)$ vahetaks oma märgi vähemalt üks kord. Jääb märgata, et $a = (\sqrt{a})^2 + 0^2$, $(x - x_i)_i^k = ((x - x_i)^{k_i/2})^2 + 0^2$ ja

$$(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = (x - \operatorname{Re} z_j)^2 + (\operatorname{Im} z_j)^2.$$