Matemaatika võistlus

Tartu, 13.03.2020

1. Olgu antud 4×2 maatriks A ja 2×4 maatriks B, mis rahuldavad tingimust
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Leia BA.

2. Kas jada (a_n), mille puhul $a_1 = 3$ ja $a_{n+1} = \dfrac{5 + \frac{2}{a_n}}{2 + \frac{1}{a_n}}$, $n \geq 1$, koondub? Kui jah, leia selle piirväärtus.

3. Olgu $a > 1$. Tõesta, et
$$\int_0^{\pi/2} \cos(ax)(\cos x)^{a-2} dx = 0.$$
(Mõned erijuhud väärivad ka punkte: $a = 3$, $a = 4$, $a \in \mathbb{Z}$.)

4. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame
$$\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{2n} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Tõesta, et
$$\lim_{n \to \infty} \gcd(x_n, y_n, z_n, v_n) = \infty.$$
(Siin gcd tähistab suurimat ühist tegurit.)

5. Leia kõik funktsioonid $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, mille korral
$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$
kõikide $x, y > 0$ korral.

Math Competition

Tartu, 13.03.2020

1. Let A be 4×2 matrix and let B be 2×4 matrix such that
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Find BA.

2. Does the sequence (a_n) with $a_1 = 3$ and $a_{n+1} = \dfrac{5 + \frac{2}{a_n}}{2 + \frac{1}{a_n}}$, $n \geq 1$, converge? If yes, find its limit.

3. Let $a > 1$. Prove that
$$\int_0^{\pi/2} \cos(ax)(\cos x)^{a-2} dx = 0.$$
(Some points are reserved for cases: $a = 3$, $a = 4$, $a \in \mathbb{Z}$.)

4. Let
$$\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{2n} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Prove that
$$\lim_{n \to \infty} \gcd(x_n, y_n, z_n, v_n) = \infty.$$

5. Find all functions $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ satisfying
$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$
for all $x, y > 0$.

Hints

1. Split both matrices into blocks of 2×2 matrices.
2. Find a fixed point and obtain a recurrence relation for the error, estimate using it.
3. Split into 2 integrals using a trigonometric identity, integrate one of them using integration by parts.
4. Prove that the matrix in question has the form $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$. It is useful to know its determinant.
5. Consider $g(x) := f(x) - x$. Look for standard properties of functions.

1. Tähistame $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ ning $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Siis

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -E \\ E & -E \end{pmatrix}.$$

Niisiis $B_1 = A_1^{-1}$ and $B_2 = -A_2^{-1}$. Järelikult,

$$BA = B_1A_1 - B_2A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Lahendus 1.* Piirväärtus (kui see on olemas) on järgmise rekurrentsi püsipunkt:

$$a = \frac{5 + \frac{2}{a}}{2 + \frac{1}{a}} \Leftrightarrow 2a + 1 = 5 + \frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Kuna jada liikmed on positiivsed, siis ainus võimalus saaks olla $a = 1 + \sqrt{2}$. Tähistame $a + \delta_n = a_n$. Nüüd

$$a + \delta_{n+1} = \frac{5 + \frac{2}{a+\delta_n}}{2 + \frac{1}{a+\delta_n}} = \frac{5(a + \delta_n) + 2}{2(a + \delta_n) + 1} = \frac{7 + 5\sqrt{2} + 5\delta_n}{3 + 2\sqrt{2} + 2\delta_n},$$

mistõttu

$$\delta_{n+1} = \frac{7 + 5\sqrt{2} + 5\delta_n - (1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2} + 2\delta_n)}{3 + 2\sqrt{2} + 2\delta_n} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})\delta_n}{3 + 2\sqrt{2} + 2\delta_n}.$$

Kui $|\delta_n| < 1$, siis

$$|\delta_{n+1}| < \frac{(3 - 2\sqrt{2})}{3} \cdot |\delta_n|.$$

Märgime, et $\delta_1 = 3 - (1 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.6 < 1$. Seega $\delta_n \to 0$.

Lahendus 2. Jada (a_n) koonduvust saab tõestada ka järgmisel viisil. On selge, et $a_n > 0$ iga n korral. Saame, et $a_{n+1} = \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{4a_n + 2}$ (formaalselt nagu „ratsionaalmurru teisendamine polünoomi ja algmurdude summaks“). Järelikult eeldusel $a_n > a_{n+1}$ kehtib $\frac{1}{4a_n + 2} < \frac{1}{4a_{n+1} + 2}$ ning seega ka $a_{n+1} > a_{n+2}$. Et $a_1 > a_2$, siis induktsiooni abil näeme, et jada on rangelt kahanev.

On teada, et kahanev alt tõkestatud jada on koonduv.

Piirväärtuse leiame samal moel nagu eelmises lahenduses.

Lahendus 3. Funktsioon $f(x) = \frac{5 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{5x + 2}{2x + 1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{4x + 2}$ kujutab lõigu $[2, 3]$ samasse lõiku (kuna funktsioon on kasvav, siis piisab näha, et $f(2) \geq 2$ ja $f(3) \leq 3$). Leiame, et $f'(x) = \frac{1}{(2x + 1)^2}$, seega $|f'(x)| < 1$ lõigus $[2, 3]$, järelikult f on ahendav lõigus $[2, 3]$. Banachi püsipunkti printsiibi kohaselt leidub funktsioonil f lõigus $[2, 3]$ täpselt üks püsipunkt. Selle leiame nagu lahenduses 1.

Lahendus 4. Uurime jada $b_n = (a_n - 1)^2 - 2$. Saame, et

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \left(\frac{5a_n + 2}{2a_n + 1} - 1\right)^2 - 2 = \left(\frac{3a_n + 1}{2a_n + 1}\right)^2 - 2 = \\ &= \frac{9a_n^2 + 6a_n + 1 - 8a_n^2 - 8a_n - 2}{(2a_n + 1)^2} = \frac{(a_n - 1)^2 - 2}{(2a_n + 1)^2} = \frac{b_n}{(2a_n + 1)^2}. \end{aligned}$$

Et $b_1 = 2 > 0$ ja $2a_n + 1 \neq 0$ (sest $a_n > 0$), siis induktiivselt leiame, et $b_n > 0$ iga n korral. Siit teeme järelduse, et $(a_n - 1)^2 > 2$, mistõttu $a_n > 1 + \sqrt{2}$ iga n korral. Samuti näeme, et jada (b_n) on kahanev. Et $a_n > 1 + \sqrt{2}$, siis $(2a_n + 1)^2 > (2(1 + \sqrt{2}) + 1)^2 = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$. Siit teeme järelduse, et $b_n = \dfrac{b_1}{(17 + 12\sqrt{2})^{n-1}} \to 0$, millest $a_n \to 1 + \sqrt{2}$.

Märkus. Jada (a_n) kahanevust on võimalik näidata mitmel moel. Uurides vahetult võrratust $a_n \geq a_{n+1}$ näeme, et see on samaväärne tingimusega $a_n \geq \dfrac{5a_n + 2}{2a_n + 1}$ ehk $(a_n - (1 + \sqrt{2}))(a_n - (1 - \sqrt{2})) \geq 0$. Seega peame lisaks näitama, et $a_n \geq 1 + \sqrt{2}$, enne pole selliselt arutledes kasvavus näidatud.

Induktsiooniga saab aga näidata küll, et $a_n > 1 + \sqrt{2}$. Nimelt, $n = 1$ korral see väide kehtib. Olgu teada, et $a_n > 1 + \sqrt{2}$ mingi n korral. Tingimus $a_{n+1} > 1 + \sqrt{2}$ tähendab, et $\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{4a_n + 2} > 1 + \sqrt{2}$ ehk $4a_n + 2 > \dfrac{1}{\frac{3}{2} - \sqrt{2}} = 6 + 4\sqrt{2}$, mistõttu $4a_n > 4 + 4\sqrt{2}$ ja $a_n > 1 + \sqrt{2}$, nagu vaja.

3. Kasutame summa koosinuse valemit:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(ax)(\cos x)^{a-2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos((a-1)x)(\cos x)^{a-1}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \sin((a-1)x)\sin x(\cos x)^{a-2}\,\mathrm{d}x.$$

Samas aga

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\pi/2} \sin((a-1)x)\sin x(\cos x)^{a-2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((a-1)x)}{a-1}\,\mathrm{d}(\cos x)^{a-1} \\
&= \left.\frac{\sin((a-1)x)(\cos x)^{a-1}}{a-1}\right|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{a-1}}{a-1}\,\mathrm{d}\sin((a-1)x) \\
&= 0 - \int_0^{\pi/2} \cos((a-1)x)(\cos x)^{a-1}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Märkus 1. Kuna $\cos 3x = (\cos x) - 4\cos x(\sin x)^2$, siis

$$\int_0^{\pi/2} \cos 3x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2\,\mathrm{d}x - 4\int_0^{\pi/2} (\sin x\cos x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Ositi integreerimise või võrduste $(\cos x)^2 = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ ja $(\sin x \cos x)^2 = \left(\dfrac{\sin 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1 - \cos 4x}{4}$ abil vahetu integreerimise teel leiame, et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ ja $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x \cos x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$.

Analoogiliselt saab käituda juhul $a = 4$, arvestades, et $\cos 4x = 1 - 8\,(\cos x \sin x)^2$.

Märkus 2. Juhul $a = 3$ on abi ka järgmisest valemist (trigonomeetriliste funktsioonide korrutise teisendamine summaks):

$$\cos 3x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$$

Paraku analoogseid valemeid pole üldjuhu jaoks.

Märkus 3. Ositi integreerida saab juhul $a = 3$ ka nii:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos 3x \cos x\,\mathrm{d}x &= \cos 3x \sin x\Big|_0^{\pi/2} + 3\int_0^{\pi/2} \sin 3x \sin x\,\mathrm{d}x = \\
&= 3\left(-\sin 3x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + 3\int_0^{\pi/2} \cos 3x \cos x\,\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

seega $8\int_0^{\pi/2} \cos 3x \cos x \, \mathrm{d}x$, millest $\int_0^{\pi/2} \cos 3x \cos x \, \mathrm{d}x = 0$.

Sarnaselt saab arutleda ka juhul $a = 4$.

4. Tähistame $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On selge, et A^n üldkuju on $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ ning $|A^n| = a^2 - 2b^2 = (-1)^n$. Märgime, et $A^{2n} - E = \begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 - 1 & 2ab \\ 4ab & a^2 + 2b^2 - 1 \end{pmatrix}$, mistõttu ülesandes toodud gcd on $g_n := \gcd(a^2 + 2b^2 - 1, 2ab)$.

   Kui $a^2 - 1 = 2b^2$, siis $g_n = \gcd(4b^2, 2ab) = 2b \cdot \gcd(2b, a)$. Muul juhul $a^2 = 2b^2 - 1$, seega $g_n = \gcd(2a^2, 2ab) = 2a \cdot \gcd(a, b)$. Et nii a kui ka b on kasvavad suurused, kehtib $g_n \to \infty$.

5. Tõestame kõigepealt, et $f(y) > y$ kõigi $y > 0$ korral. Kui mingi arvu $y > 0$ jaoks oleks tingimus $f(y) > y$ rikutud, siis kas $f(y) = y$, mis annaks sarnaste liikmete koondamise järel võrduse $f(y) = 0$, või $y > f(y)$ ning

$$f(y) = f(y - f(y) + f(y)) = f(y - f(y) + y) + f(y),$$

   mistõttu $f(2y - f(y)) = 0$ (arvestame, et $2y - f(y) > 0$). Mõlemad juhud annavad vastuolu.

   Nüüd saame defineerida abifunktsiooni $g(x) := f(x) - x > 0$ kõigi $x > 0$ korral. Algne tingimus omandab järgmise kuju:

$$g(x + g(y) + y) + x + g(y) + y = g(x + y) + x + y + g(y) + y$$

   ehk

$$g(x + y + g(y)) = g(x + y) + y$$

   iga $x, y > 0$ korral. Teisisõnu,

$$g(x + g(y)) = g(x) + y \tag{1}$$

   alati, kui $x > y > 0$. On selge, et g on injektiivne (kehtigu $g(y) = g(z)$, olgu $x > y, z$, siis $y = g(x + g(y)) - g(x) = g(x + g(z)) - g(x) = z$). Järelikult, kui $x > y + z$, siis

$$g(x + g(y + z)) = g(x) + y + z = g(x + g(y)) + z = g(x + g(y) + g(z)).$$

   Tänu injektiivsusele saame, et funktsioon g on aditiivne: $g(y+z) = g(y) + g(z)$ kõigi $y, z > 0$ jaoks. See on aga Cauchy funktsionaalvõrrand positiivsete väärtustega funktsiooni jaoks ning teadaolevalt selle kõik lahendid on kujul $g(x) = cx$, kus c on mingi positiivne konstant.

   Määrame konstandi c väärtuse. Aditiivsus koos tingimusega (**??**) annab, et $g(g(y)) = y$ kõigi $y > 0$ jaoks, seega siis $c^2 y = y$ kõigi $y > 0$ jaoks. Niisiis $c = 1$, seega $g(x) = x$ ja järelikult $f(x) = 2x$ kõigi arvude $x > 0$ jaoks.

   Vahetu kontroll näitab, et $f(x) = 2x$ rahuldab lähtevõrrandit.

   Cauchy funktsionaalvõrrani lahendus: Esmalt kontrollitakse, et $g(nx) = ng(x)$ kõigi naturaalarvude n ja reaalarvude $x > 0$ korral. Seejärel valitakse x rolli x/n ning saadakse, et $g(x/n) = g(x)/n$. Nende kombineerimisel saame, et iga positiivse ratsionaalarvu q ja iga $x > 0$ korral $g(qx) = qg(x)$. Kuna g omandab ainult positiivseid väärtusi, garanteerib g aditiivsus selle, et g on rangelt kasvav. (Tõepoolest, valime $x < y$, siis $g(y) = g(x + (y - x)) = g(x) + g(y - x) > g(x)$.)

   Olgu $x > 0$ irratsionaalne, leiame alt ja ülalt ratsionaallähendid: $q_n < x < r_n$, kus $q_n, r_n \to x$. Siis

$$cx = c \lim q_n = \lim g(q_n) \leq g(x) \leq \lim g(r_n) = c \lim r_n = cx,$$

   mistõttu $g(x) = cx$.