Matemaatikaolümpiaad 2002

1. Olgu $f(x)$ funktsioon pideva kolmanda tuletisega. Tõestada, et eksisteerib arv $a \in \mathbb{R}$ selline, et

$$f(a) \cdot f'(a) \cdot f''(a) \cdot f'''(a) \geq 0.$$

2. Vaatleme funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1-2x-x^2}$ astmereaks arendamist

$$\frac{1}{1-2x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Tõestada, et iga täisarvu $n \geq 0$ eksisteerib naturaalarv m selline et

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_m.$$

3. Milliste positiivsete arvude paaride (a, b) jaoks päratu integraal

$$\int_b^{\infty} \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} \right) dx$$

koondub?

4. Jadas (a_n)

$$a_1 = A; \quad a_2 = B \quad (0 < B < A); \quad \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Tõestada, et jada (a_n) koondub ja leida selle piirväärtus.

5. Olgu S lõplik naturaalarvude hulk, iga neist suurem ühest. Oletame, et iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}$ jaoks leidub mingi $s \in S$ selline, et $\text{SÜT}(s, n) = 1$ või $\text{SÜT}(s, n) = s$. Näidata, et eksisteerivad $s, t \in S$ sellised, et $\text{SÜT}(s, t)$ on algarv.

6. Olgu G rühm ühikuga e ja olgu $\phi : G \to G$ funktsioon selline, et

$$\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3) = \phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3)$$

igakord kui $g_1 g_2 g_3 = e = h_1 h_2 h_3$. Tõestada, et leidub element $a \in G$ selline, et $\psi(x) = a\phi(x)$ oh homomorfism (s.t. $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ iga $x, y \in G$ jaoks).