Matemaatikaolümpiaad 2001
Valikvoor

1. (10 p.) Leida kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon f, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$1)\ f(0)=f'(0)=1;\quad 2)\ f''(x)\geq 0,\ x\in(0,1);\quad 3)\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}.$$

2. (18 p.) Olgu reaalarvud $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sellised, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\lambda_1^k+\lambda_2^k+\ldots+\lambda_n^k>0.$$

Defineerime funktsiooni

$$f(t)=\frac{1}{(1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)\ldots(1-\lambda_n t)}.$$

Tõestada, et $f^{(k)}(0)>0$ iga $k\in\mathbb{N}$ korral.

3. (14 p.) Olgu (a_n) tõkestatud jada, mis rahuldab tingimust

$$a_{n+1}\geq a_n-\frac{1}{2^n},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Tõestada, et see jada koondub.

4. (16 p.) Olgu f lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon. Tõestada, et

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\int_a^b f^{2n}(x)dx}=\max_{[a,b]}|f|.$$

5. (12 p.) Olgu $A=(a_{ij})\in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ on selline maatriks, et $a_{ii}=1$ ja $a_{ij}=0$, kui $i>j$, $i=1,\ldots,n$. Tõestage, et maatriks A^{-1} omab sama kuju s.t. $A^{-1}=(b_{ij})$, kus $b_{ii}=1$ ja $b_{ij}=0$, kui $i>j$, $i=1,\ldots,n$.

6. (20 p.) Olgu K korpus, $\mathrm{char}(K)=0$, ning olgu $f\in K[x]$. Tõestada, et tuletis f' jagab polünoomi f siis ja ainult siis, kui f esitub kujul

$$f(x)=a_0(x-x_0)^n.$$

(Kui korpuse K mingi lihtne alamkorpus on isomorfne ratsionaalarvude korpusega $\mathbb{Q}$, siis öeldakse, et korpuse K karakteristika on 0. Korpuse K karakteristikat tähistatakse: $\mathrm{char}(K)$.)