Matemaatika-informaatikateaduskonna üliõpilaste matemaatikaolümpiaad

11. mai 2007. a.

1.

(a) Olgu u ja v kommutatiivse ringi kaks nilpotentset elementi. Tõestada, et ka $u+v$ on nilpotentne.

(b) Tuua näide sellisest (mittekommutatiivsest) ringist R ja selle nilpotentsetest elementidest $u, v \in R$, mille korral $u+v$ ei ole nilpotentne.

(Elementi u nimetatakse nilpotentseks, kui leidub selline positiivne täisarv n, et $u^n = 0$.)

2. Olgu fikseeritud $\epsilon > 0$ jaoks S kõigi selliste lahtiste vahemike ühend, mis on kujul $(n-\epsilon, n+\epsilon)$, kus n on täisarv. Kas iga $\epsilon > 0$ korral on võimalik katta reaaltelg lõpliku arvu hulkadega, mis on kujul $a \cdot S = \{ax \mid x \in S\}$ $(a \in \mathbb{R})$?

3. Kas on võimalik leida sellised $A, B, C \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, et

(a) $A^2 + B^2 = C^2$;

(b) $A^4 + B^4 = C^4$.

($\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Z}) \mid |A| = 1\}$.)

4. Tähistagu S kõigi selliste positiivsete reaalarvude jadade (x_n) hulka, mille korral $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$.

Näidata, et iga $(x_n) \in S$ korral kehtib $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}{\sqrt{n}} = 0$.

5. Arvutada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{n+x}{2^{-x}+3}\, dx\,.$$

6. Tõestada, et

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^{n-2} = n^{n-2}$$

iga täisarvu $n \geq 3$ korral.