Matemaatika-informaatikateaduskonna üliõpilaste matemaatikaolümpiaad

13. mai 2005. a.

1. (10 punkti) Olgu f selline pidev reaalmuutuja funktsioon, et $f(x-1)+f(x+1) \geq x + f(x)$ mistahes reaalarvu x korral. Milline on integraali $\int_1^{2005} f(x)dx$ minimaalne võimalik väärtus?

Lahendus. Tähistame $g(x) = f(x) - x$. Siis

$$g(x-1) + x - 1 + g(x+1) + x + 1 \geq x + g(x) + x\,,$$

ehk $g(x-1) + g(x+1) \geq g(x)$. Nüüd aga

$$g(x+3) \geq g(x+2) - g(x+1) \geq -g(x)\,.$$

Seetõttu

$$\int_a^{a+6} g(x)dx = \int_a^{a+3} g(x)dc + \int_{a+3}^{a+6} g(x)dx = \int_a^{a+3} (g(x) + g(x+3))dx \geq 0\,.$$

Siit tuleneb, et

$$\int_1^{2005} g(x)dx = \sum_{n=0}^{333} \int_{6n+1}^{6n+7} g(x)dx \geq 0\,.$$

Järelikult

$$\int_1^{2005} f(x)dx = \int_1^{2005} (g(x) + x)dx \geq \int_1^{2005} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^{2005} = \frac{2005^2 - 1}{2} = 2010012\,.$$

Võrdus kehtib $f(x) = x$ korral.

2. (10 punkti) Olgu $S = \{0000000, 0000001, \ldots, 1111111\}$ kõikvõimalike seitsmekohaliste binaararvude hulk. Kahe elemendi $s_1, s_2 \in S$ vaheline **kaugus** on s_1 ja s_2 erinevate kahendkohtade arv. Näiteks 0001011 ja 1001010 vaheline kaugus on 2, kuna nende esimene ja seitsmes kahendkoht on erinevad. Tõestada, et kui T on hulga S selline alamhulk, millel on üle 16 elemendi, siis T sisaldab kahte elementi, mille vaheline kaugus on ülimalt 2.

Lahendus. Iga elemendi $t \in T$ jaoks võime leida hulga $S_t \subset S$, mis koosneb elemendist t ja neist seitsmest S elemendist, mis saadakse täpselt ühe t kahendkoha vastupidiseks muutmisel. Oletame, et suvalise kahe T elemendi vaheline kaugus on vähemalt 3. Siis hulgad S_t peaksid olema omavahel lõikumatud ja kehtiks $|S| \geq \sum_{t \in T} |S_t| = 8|T|$, mistõttu $|T| \leq |S|/8 = 2^7/8 = 16$. Järelikult kui $|T| > 16$, siis peavad leiduma kaks T elementi, mille vaheline kaugus on ülimalt 2.

3. (15 punkti) Tõestada, et piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{i=1}^{n} (n^2 + i^2)^{1/n}$$

on olemas ja ja leida selle väärtus.

Lahendus. Me näitame, et piirväärtuseks on $2e^{-2+\pi/2}$. Olgu $P_n = n^{-2}\prod_{i=1}^{n}(n^2+i^2)^{1/n}$. Korrutise igast tegurist $(n^2)^{1/n}$ välja tuues näeme, et $P_n = \prod_{i=1}^{n}(1+(i/n)^2)^{1/n}$, mistõttu

$$\log P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right).$$

Parempoolne avaldis on Riemanni summa integraali $I = \int_0^1 \log(1+x^2)dx$ jaoks ja järelikult koondub piirprotsessis $n\to\infty$ selleks integraaliks, st $\lim_{n\to\infty}\log P_n = I$. Seega on piirväärtus $\lim_{n\to\infty} P_n$ olemas ja võrdub arvuga e^I. Meil on tarvis veel leida integraal I. Tavapärane osade kaupa integreerimine annab

$$\begin{aligned} I &= x\log(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x(2x)}{1+x^2}dx \\ &= \log 2 - \int_0^1\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx \\ &= \log 2 - 2 + 2\arctan x\Big|_0^1 = \log 2 - 2 + \pi/2\,. \end{aligned}$$

4. (15 punkti) Leida vähim naturaalarv $n > 11$ mille jaoks leidub n järku polünoom järgmiste omadustega:

(a) $P(k) = k^{11}$ iga $k = 1, 2, \ldots, n$ korral;

(b) $P(0)$ on naturaalarv;

(c) $P(-1) = 2005$.

Lahendus. Oletame kõigepealt, et $P(x)$ on n järku polünoom, mis rahuldab tingimusi $(a), (b)$ ja (c). Vaatleme polünoomi $Q(x) = P(x) - x^{11}$. Siis $Q(x)$ on ülimalt n järku ja tingimusest (a) järeldub, et polünoomil $Q(x)$ on juured $k = 1, 2, \ldots, n$. Seega $Q(x)$ on kujul

$$Q(x) = C(x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

kus C on mingi konstant. C leidmiseks kasutame tingimust (c), millest tulenevalt

$$2005 = P(-1) = Q(-1) + (-1)^{11} = C(-1)^n(n+1)! - 1\,.$$

Seega $C = 2006(-1)^n/(n+1)!$. Lisaks

$$P(0) = Q(0) = C(-1)^n n! = \frac{2006}{n+1}$$

ja (b) kehtib parajasti siis, kui $n+1$ on 2006 jagaja. Järelikult iga n järku polünoom $P(x)$, mis rahuldab tingimusi (a)–(c), peab olema kujul $P(x) = C(x-1)(x-2)\ldots(x-n) + x^{11}$ ülaltoodud konstandiga C, kusjuures $n+1$ jagab arvu 2006. Teisalt on lihtne näha, et iga selline polünoom rahuldab tingimusi (a)–(c). Järelikult on otsitav arv n vähim arv $n > 11$, mille korral $n+1$ jagab arvu 2006, st n on 1 võrra väiksem kui 2004 vähim jagaja, mis ületab arvu 13. Tegurdades arvu 2006, saame $2006 = 2\cdot 17\cdot 59$. Järelikult on 2004 vähim jagaja, mis ületab arvu 13, arv 17 ja $n = 16$.

5. (20 punkti) Nimetame naturaalarvude hulka A kaksikuvabaks, kui see ei sisalda ühtegi elementide paari a ja a', mille korral $a' = 2a$. Leida koos tõestusega suurima kaksikuvaba hulga $A \subset \{1, 2, \ldots, 256\}$ võimsus.

Lahendus. Näitame, et otsitav maksimaalne võimsus on 171. Veendumaks, et võimsus ei ületa arvu 171, oletame, et $A \subset \{1, 2, \ldots, 256\}$ on kaksikuvaba. Olgu $a \in A$ ja tähistame arvuga a_0 arvu a paaritut osa, st $a = a_0 2^i$, a_0 on paaritu ja i on mittenegatiivne. Iga paaritu arvu m korral tähistagu A_m nende elementide $a \in A$ hulka, kus $a_0 = m$. Hulgad A_m, $m = 1, 3, \ldots, 255$ jaotavad A osadeks, st $|A| = |A_1| + |A_3| + \ldots + |A_{255}|$. Võimsuse $|A|$ ülemise tõkke leidmiseks vaatleme $|A_m|$ erinevate m väärtuste vahemike korral.

Kui (1) $128 < m \leq 256$, siis leidub ülimalt üks $a \in A$, mille korral $a_0 = m$, täpsemalt $a = m$. Seega võimsuste $|A_m|$ summa üle m vahemikus (1) on ülimalt selles vahemikus sisalduvate paaritute m koguarv, st 64.

Kui (2) $64 < m \leq 128$, siis iga $a \leq 256$, kus $a_0 = m$, on kujul $a = m$ or $a = 2m$, kuid kaksikuvabaduse tõttu kuulub ülimalt üks neist hulka A. Seega $|A_m| \leq 1$ kui m on vahemikus (2) ja $|A_m|$ summa üle selliste arvude m on ülimalt 32.

Kui (3) $32 < m \leq 64$, siis $a_0 = m$ annab, et $a = m2^i$, kus $i = 0, 1$ või 2, kuid kaksikuvabadusest järeldub jälle, et ülimalt kaks neist saavad kuuluda hulka A. Seega $|A_m| \leq 2$ vahemikus (3) ja $|A_m|$ summa üle m selles vahemikus on ülimalt $16 \cdot 2 = 32$.

Analoogiliselt saab vaadelda vahemikke (4) $16 < m \leq 32$, (5) $8 < m \leq 16$, (6) $4 < m \leq 8$, (7) $2 < m \leq 4$ (st $m = 3$) ja (8) $m = 1$. Näeme, et $|A_m|$ on ülimalt 2 vahemikus (4), 3 vahemikes (5) and (6), 4 vahemikus (7) ja 5 vahemikus (8). Vastavad summad üle $|A_m|$ on seega tõkestatud arvudega $8 \cdot 2 = 16$, $4 \cdot 3 = 12$, $2 \cdot 3 = 6$, $1 \cdot 4 = 4$ ja $1 \cdot 5 = 5$. Kokku liites saame

$$|A| \leq 64 + 32 + 32 + 16 + 12 + 6 + 4 + 5 = 171\,.$$

Näitamaks, et see tõke on saavutatav, võtame hulgaks A selliste täisarvude $n \leq 256$ hulga, mis on kujul $a_0 2^i$, kus a_0 on paaritu ja $i = 1, 2, \ldots$ Siin on kerge kontrollida, et eelnevas arutelus sisalduvad võrratused $|A_m|$ jaoks muutuvad võrdusteks ja seega $|A| = 171$.

6. (20 punkti) Olgu a ja b reaalarvud vahemikust $(0, 1/2)$ ja olgu g pidev reaalmuutuja funktsioon, mille korral $g(g(x)) = ag(x) + bx$ kõigi reaalarvude x korral. Tõestada, et $g(x) = cx$, kus c on mingi konstant.

Lahendus. Paneme tähele, et $g(x) = g(y)$ tõttu $g(g(x)) = g(g(y))$ ja seega $x = y$ tänu ülesandes antud võrdusele. Järelikult on g injektiivne. Kuna g on pidev, siis on g kas rangelt kasvav või rangelt kahanev. Seejuures ei saa funktsioonil g olla lõplikku piirväärtust L protsessis $x \to +\infty$, muidu kehtiks $g(g(x)) - ag(x) = bx$ ja vasak pool oleks tõkestatud ning parem pool tõkestamata. Samamoodi ei saa funktsioonil g olla lõplikku piirväärtust protsessis $x \to -\infty$. Koos monotoonsusega annab see, et g on ka sürjektiivne.

Fikseerime suvalise x_0 ja defineerime x_n iga täisarvu $n \in \mathbb{Z}$ jaoks rekursiivselt võrdusega $x_{n+1} = g(x_n)$ kui $n > 0$, ja võrdusega $x_{n-1} = g^{-1}(x_n)$ kui $n < 0$. Olgu $r_1 = (a + \sqrt{a^2 + 4b})/2$ ja $r_2 = (a - \sqrt{a^2 + 4b})/2$ polünoomi $x^2 - ax - b = 0$ juured, siis $r_1 > 0 > r_2$ ja $1 > |r_1| > |r_2|$. Järelikult leiduvad $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ nii, et $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ iga $n \in \mathbb{Z}$ korral.

Oletame, et g on rangelt kasvav. Kui $c_2 \neq 0$ mingi x_0 valiku korral, siis x_n on tõkestatud arvuga r_2^n piisavalt negatiivsete n väärtuste korral. Kuid võttes sobiva paarsusega piisavalt negatiivse n korral x_n ja x_{n+2} , saame $0 < x_n < x_{n+2}$, kuid $g(x_n) > g(x_{n+2})$, vastuolu. Seega $c_2 = 0$; kuna $x_0 = c_1$ ja $x_1 = c_1 r_1$, siis ka $g(x) = r_1 x$ iga x korral. Analoogiliselt rangelt kahaneva g korral on $c_2 = 0$ või x_n on tõkestatud arvuga r_1^n piisavalt positiivse n korral. Kuid piisavalt positiivse ja õige paarsusega n korral x_n ja x_{n+2} vaadeldes saame $0 < x_{n+2} < x_n$, aga $g(x_{n+2}) < g(x_n)$, vastuolu. Järelikult sel juhul $g(x) = r_2 x$ suvalise x korral.