Matemaatika-informaatikateaduskonna üliõpilaste matemaatikaolümpiaad

13. mai 2005. a.

1. (10 punkti) Olgu f selline pidev reaalmuutuja funktsioon, et

$$f(x-1)+f(x+1) \geq x+f(x)$$

mistahes reaalarvu x korral. Milline on integraali $\int_1^{2005} f(x)dx$ minimaalne võimalik väärtus?

2. (10 punkti) Olgu $S=\{0000000, 0000001, \ldots, 1111111\}$ kõikvõimalike seitsmekohaliste binaararvude hulk. Kahe elemendi $s_1, s_2 \in S$ vaheline **kaugus** on s_1 ja s_2 erinevate kahendkohtade arv. Näiteks 0001011 ja 1001010 vaheline kaugus on 2, kuna nende esimene ja seitsmes kahendkoht on erinevad. Tõestada, et kui T on hulga S selline alamhulk, millel on üle 16 elemendi, siis T sisaldab kahte elementi, mille vaheline kaugus on ülimalt 2.

3. (15 punkti) Tõestada, et piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{i=1}^{n} (n^2+i^2)^{1/n}$$

on olemas ja ja leida selle väärtus.

4. (15 punkti) Leida vähim naturaalarv $n>11$ mille jaoks leidub n järku polünoom järgmiste omadustega:

(a) $P(k)=k^{11}$ iga $k=1,2,\ldots,n$ korral;

(b) $P(0)$ on naturaalarv;

(c) $P(-1)=2005$.

5. (20 punkti) Nimetame naturaalarvude hulka A kaksikuvabaks, kui see ei sisalda ühtegi elementide paari a ja a', mille korral $a'=2a$. Leida koos tõestusega suurima kaksikuvaba hulga $A \subset \{1,2,\ldots,256\}$ võimsus.

6. (20 punkti) Olgu a ja b reaalarvud vahemikust $(0,1/2)$ ja olgu g pidev reaalmuutuja funktsioon, mille korral

$$g(g(x))=ag(x)+bx$$

kõigi reaalarvude x korral. Tõestada, et $g(x)=cx$, kus c on mingi konstant.