Matemaatika-informaatikateaduskonna üliõpilaste matemaatikaolümpiaad

30. aprill 2004. a.

1. (20 punkti) Olgu $f(x)$ funktsioon, mis on määratud kogu reaalteljel ja mis rahuldab järgmisi tingimusi:

(i) $f(x)$ on tõkestatud igal lõplikul intervaalil;

(ii) eksisteerib piirväärtus $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x)) =: l$.

Veenduda, et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = l$.

2. (15 punkti) Tähistame

$$a_n := \sqrt{1^2 + \sqrt{2^2 + \sqrt{3^2 + \ldots + \sqrt{n^2}}}}.$$

Kas jada (a_n) on tõkestatud?

3. (10 punkti) Olgu $f:\ [1, 1+e^{\frac{\pi}{2}}] \to [0, \frac{\pi}{2}]$ üksühene funktsioon, mis rahuldab seost

$$\sin f(x) + e^{f(x)} = x$$

iga $x \in [1, 1+e^{\frac{\pi}{2}}]$ jaoks. Arvutada

$$\int_1^{1+e^{\frac{\pi}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. (10 punkti) Kas kolmeelemendilisel hulgal S on võimalik defineerida binaarne tehe $*$ mis oleks kommutatiivne ($x*y = y*x$ iga $x, y \in S$ korral) ja rahuldaks tingimust $x*(x*y) = y$ iga $x, y \in S$ korral ?

5. (15 punkti) Olgu $p(z)$ kompleksarvuliste kordajatega polünoom selline, et

$$|p(j) - 3^j| < 1$$

$j = 0, 1, \ldots, n$ korral. Näidata, et polünoomi $p(z)$ aste on vähemalt n.

6. (20 punkti) Olgu $\alpha \in [-2, 2]$ fikseeritud reaalarv ning olgu $A_n = (a_{i,j})$ $n \times n$-maatriks selline, et

(i) $a_{i,i} = \alpha$, iga $1 \le i \le n$ korral;

(ii) $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$, iga $1 \le i \le n-1$ korral;

(iii) $a_{i,j} = 0$ muudel juhtudel.

Näiteks,

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Tõestada, et leidub lõpmatult palju naturaalarve n nii, et $\det(A_n) < 0$.