Matemaatika-informaatikateaduskonna üliõpilaste matemaatikaolümpiaad

30. aprill 2003. a.

1. (20 punkti) Oglu $g(x)$ pidev ja positiivne funktsioon vahemikus $(0, \infty)$. Vaatleme funtksiooni

$$z(y) = \frac{\gamma + \int\limits_0^y xg(x)dx}{\int\limits_0^y g(x)dx}, \qquad y > 0, \quad \gamma \in R^+.$$

Veenduda, et eksisteerib ainus punkt y_0 selline, et $z(y_0) = y_0$, kusjuures funktsionil $z(y)$ on globaalne miinimum punktis y_0.

Lahendus. Ositi integreerimisel me saame

$$\int_0^y xg(x)dx = y\int_0^y g(x)dx - \int_0^y dx \int_0^x g(t)dt \quad (y > 0).$$

Vaalteme funktsioonid $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ ja $H(x) = \int_0^x G(t)dt$ $(x > 0)$ ja uurime nende omadused. Funktsioon G on positiivne ja kasvav vahemikus $(0, \infty)$ ning $G'(x) = g(x)$ iga $x > 0$ jaoks. Funktsioon H on ka positiivne, pidev, kasvav ja rahuldab seosed

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = 0, \qquad \lim_{y \to \infty} H(y) = \infty.$$

Funktsioon $z(y)$ avaldub nüüd kujul

$$z(y) = \frac{\gamma + yG(y) - H(y)}{G(y)} = y + \frac{\gamma - H(y)}{G(y)}.$$

Seega $z(y) = y$ parajasti siis, kui $H(y) = \gamma$. Kuna H on kasvav, siis eksisteerib parajasti üks punkt y_0 selline, et $H(y_0) = \gamma$.

Nüüd leiame miinimumi:

$$z'(y) = 1 + \frac{-G(y)G(y) - (\gamma - H(y))g(y)}{G(y)^2} = \frac{-(\gamma - H(y))g(y)}{G(y)^2} = \frac{g(y)(y - z(y))}{G(y)}.$$

Kui $0 < y < y_0$, siis $H(y) < \gamma$ ja $z(y) > y$, seega $z'(y) < 0$; kui $y_0 < y$, siis $H(y) > \gamma, z(y) < y$ ja $z'(y) > 0$. Siit järeldub, et funktsioonil $z(y)$ on globaalne miinimum punktis y_0.

2. (15 punkti) Olgu $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}$ pidev funktsion. Veenduge,et ülesannel

$$(*) \begin{cases} x'(t) &= x^2(t) + f^2(t) \\ x(0) &= 1, \end{cases}$$

puudub lahendus lõigus $[0, 2]$.

Lahendus. Oletame vastuväiteliselt, et eksisteerib funktsioon $\phi : [0,2] \mapsto \mathbb{R}$ selline, et

$$\phi'(t) = \phi^2(t) + f^2(t),\ \phi(0) = 1.$$

Seega ϕ kasvab ja $\phi(t) \geq 1$ $(t \in [0,2])$. Olgu $\psi(t) := 1 - \frac{1}{\phi(t)}$. Selge, et $\psi(t) < 1$ $(t \in [0,2])$. Seega

$$\phi(t) = \frac{1}{1-\psi(t)} \ \text{ ja } \ \phi'(t) = \frac{1}{(1-\psi(t))^2}\psi'(t) = \frac{1}{(1-\psi(t))^2} + f^2(t) \geq \frac{1}{(1-\psi(t))^2}$$

ning järelikult

$$\psi'(t) \geq 1 \Rightarrow \psi(t) - \psi(0) \geq t \ \text{ for } t \in [0,2].$$

Võttes $t = \frac{3}{2}$, saame $\psi(\frac{3}{2}) \geq \frac{3}{2}$, mis annab vastuolu.

3. (10 punkti) Olgu (a_n) naturaalarvude jada selline, et $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ ja

$$a_{n+1} = \frac{a_1 \cdots a_n}{a_{[\frac{n}{2}]}} + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Veenduge, et rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}a_{[\frac{n}{2}]}}$$

summa on ratsionaalarv.

Lahendus. Kuna $\frac{a_1 \cdots a_n}{a_{[\frac{n}{2}]}}$ on naturaalavr, siis $a_n \geq 2$ $(n \geq 1)$, seega

$$a_{n+1}a_{[\frac{n}{2}]} = a_1 \cdots a_n + a_{[\frac{n}{2}]} > 2^n$$

ja rida koondub. Edasi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}a_{[\frac{n}{2}]}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{a_1 \cdots a_n}{a_{[\frac{n}{2}]}}}{a_1 \cdots a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - 1}{a_1 \cdots a_{n+1}} = \frac{1}{a_1}.$$

4. (10 punkti) Olgu R nulliteguritega ring ning oletame, et nullitegurite arv on lõplik. Tõestada, et R on lõplik.

Lahendus. Olgu m nullitegurite arv ning $u, v \in R$ on sellised, et $u \neq 0$, $v \neq 0$ ja $uv = 0$.

Kuna iga $x \in R$ korral $(xu)v = x(uv) = 0$, siis $xu = 0$ või xu on nullitegur.

Kui $xu = yu$ erinevate elementide $x, y \in R$ korral, siis $(x-y)u = 0$ ning $x - y$ on nullitegur. Seega 0 või suvaline nulliteguritest on võimalik saada kujul xu maksimaalselt $m+1$ korda. Nüüd on selge, et elementide arv ringis R ei saa olla surem kui $(m+1)^2$.

5. (15 punkti) Olgu

$$Q_c = E - c \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

kus E on n-indat järku ühikmaatriks ning vektor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ on nullist erinev. Leida kõik skalaari c väärtused mille korral $Q_c^m = Q_c$, mingi naturaalarvu $m \neq 1$ jaoks.

Lahendus. Kuna $u = (u_1, \dots u_n)$ on nullist erinev, üldsus kitsendamata me võime oletada et $Q_c = E - \frac{c}{|u|^2} u^t u$. Me näitame induktsiooniga, et

$$Q_c^m = E - \frac{1-(1-c)^m}{|u|^2} u^t u\,. \tag{1}$$

Kui $m = 1$, siis (1) kehtib. Kui (1) kethib naturaalarvu m korral, siis

$$Q_c^{m+1} = Q_c^n Q_c = \left(E - \frac{1-(1-c)^m}{|u|^2} u^t u\right)\left(E - \frac{c}{|u|^2} u^t u\right) = E - \frac{1-(1-c)^{m+1}}{|u|^2} u^t u\,.$$

Nüüd lahendame võrrand

$$1 - (1-c)^m = c\,.$$

ehk

$$1 - c = (1-c)^m\,.$$

Kui m on paaris, saame $1 - c = 0$ või $1 - c = 1$. Kui m on paaritu, siis veel üheks lahendiks on $1 - c = -1$. Seega $c \in \{0, 1, 2\}$.

6. (20 punkti) Olgu S_n on n-elemendilise hulga substitutsioonide hulk. Iga $\pi \in S_n$ jaoks me defineerime $A(\pi) = \{\eta \in S_n \mid \eta \circ \pi = \pi \circ \eta\}$ ning $\Phi(\pi) = |A(\pi)|$. Leida $\Phi(\pi)$ iga $\pi \in S_n$ jaoks.

Lahendus. Iga $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$, $k \geq 2$, $a_i \neq a_j$ kui $i \neq j$ jaoks me defineerime substitutsioon

$$\pi_{a_1,a_2,\dots,a_k}(x) = \begin{cases} a_{i+1 \bmod k} & \textit{kui } x \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \\ x & \textit{kui } x \notin \{a_1, a_2, \dots, a_k\}. \end{cases}$$

Olgu $\pi = \pi_{a_1^1, a_2^1, \dots, a_{k_1}^1} \circ \pi_{a_1^2, a_2^2, \dots, a_{k_2}^2} \circ \dots \circ \pi_{a_1^l, a_2^l, \dots, a_{k_l}^l}$, kus $\{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{k_i}^i\} \cap \{a_1^j, a_2^j, \dots, a_{k_j}^j\} = \emptyset$, kui $i \neq j$. Tegelikult, iga substitutsioon on esitatav sellisel kujul. Oletame, et leidub $c \notin \{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{k_i}^i\}$ selline et $\eta(c) = a_s^i$, mingite i ja s korral. Siis

$$\pi(\eta(c)) = a_{s+1 \ \mathrm{mod} k_i}^i$$

ning

$$\eta(\pi(c)) = \begin{cases} \eta(c) = a_s^i & \textit{kui } c \notin \bigcup_{j \neq i} \{a_1^j, a_2^j, \dots, a_{k_j}^j\} \\ \eta(a_r^j) & \textit{kui } c = a_{r-1 \bmod k_j}^j. \end{cases}$$

Järelikult, kui $\eta \circ \pi = \pi \circ \eta$, siis $\eta(\{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{k_i}^i\}) = \{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{k_i}^i\}$ iga $i = 1, 2, \dots, l$ korral. Kui mingite $s, r \in \{1, \dots, k_i\}$ jaoks kehtib $\eta(a_s^i) = a_r^i$, siis $\pi(\eta(a_s^i)) = a_{r+1 \bmod k_i}^i$ ja $\eta(\pi(a_s^i)) = \eta(a_{s+1 \bmod k_i}^i)$. Järelikult, kui $\eta \circ \pi = \pi \circ \eta$ siis iga $i = 1, 2, \dots, l$ ja suvalise $r_i \in \{1, \dots, k_i\}$ korral kehtivad:

(i) $\eta(\{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{k_i}^i\}) = \{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{k_i}^i\}$;

(ii) $\eta(a_s^i) = a_{r_i+s \bmod k_i}^i$.

Kerge on näha, et tingimused (i) ja (ii) on ka piisavad. Järelikult

$$\Phi(\pi) = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_l \cdot (n - (k_1 + k_2 + \ldots + k_l))!\,.$$