Matemaatika-informaatikateaduskonna üliõpilaste matemaatikaolümpiaad

30. aprill 2003. a.

1. (20 punkti) Oglu $g(x)$ pidev ja positiivne funktsioon vahemikus $(0, \infty)$. Vaatleme funtksiooni

$$z(y) = \frac{\gamma + \int\limits_0^y x g(x) dx}{\int\limits_0^y g(x) dx}, \qquad y > 0, \quad \gamma \in R^+.$$

Veenduda, et eksisteerib ainus punkt y_0 selline, et $z(y_0) = y_0$, kusjuures funktsionil $z(y)$ on globaalne miinimum punktis y_0.

2. (15 punkti) Olgu $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}$ pidev funktsion. Veenduge,et ülesannel

$$\begin{cases} x'(t) &= x^2(t) + f^2(t) \\ x(0) &= 1, \end{cases}$$

puudub lahendus lõigus $[0, 2]$.

3. (10 punkti) Olgu (a_n) naturaalarvude jada selline, et $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ ja

$$a_{n+1} = \frac{a_1 \cdots a_n}{a_{[\frac{n}{2}]}} + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Veenduge, et rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} a_{[\frac{n}{2}]}}$$

summa on ratsionaalarv.

4. (10 punkti) Olgu R nulliteguritega ring ning oletame, et nullitegurite arv on lõplik. Tõestada, et R on lõplik.

5. (15 punkti) Olgu

$$Q_c = E - c \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

kus E on n-indat järku ühikmaatriks ning vektor $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ on nullist erinev. Leida kõik skalaari c väärtused mille korral $Q_c^m = Q_c$, mingi naturaalarvu $m \neq 1$ jaoks.

6. (20 punkti) Olgu S_n on n-elemendilise hulga substitutsioonide hulk. Iga $\pi \in S_n$ jaoks me defineerime $A(\pi) = \{\eta \in S_n \mid \eta \circ \pi = \pi \circ \eta\}$ ning $\Phi(\pi) = |A(\pi)|$. Leida $\Phi(\pi)$ iga $\pi \in S_n$ jaoks.