Matemaatikaolumpiaad
Valikvoor

1. Olgu funktsioon f määratud kogu reaalteljel, kusjuures suvaliste $x \in \mathbb{R}$ ja $h > 0$ korral

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2.$$

Tõestada, et $f(x) \equiv \text{const}$. **10 punkti.**

2. Tõestada võrratus

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{5}{4} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

12 punkti.

3. Olgu funktsioon f kogu reaalteljel kaks korda pidevalt diferentseeruv. Tõestada, et suvalise $x \in \mathbb{R}$ korral

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

13 punkti.

4. Olgu maatriksil S järgmine omadus: suvaline maatriks A on ühesel viisil esitatav summana $A = A_1 + A_2$, kus maatriksid A_1 ja A_2 rahuldavad vastavalt tingimusi $A_1 S = S A_1$ ja $A_2 S = -S A_2$.

Tõestada, et selleks on tarvilik ja piisav, et S^2 oleks ühikmaatriksi kordne. (Kõik vaadeldavad maatriksid on n-järku ruutmaaatriksid.) **15 punkti.**

5. Olgu E 3-mõõtmeline vektorruum üle korpuse $\mathbb{Q}$ ning olgu elemendid $x, y, z \in E$, $x \neq 0$, sellised, et mingi lineaarse kujutuse $T: E \to E$ korral $Tx = y$, $Ty = z$ ja $Tz = x + y$. Tõestada, et elemendid x, y ja z on lineaarselt sõltumatud. **15 punkti.**

6. Leida järgmised piirväärtused.

1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2}$. **15 punkti.**

2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot e^n}$. **10 punkti.**