# Valimik olümpiaadiülesandeid matemaatilisest analüüsist

Koostanud Aleksander Levin

# Sisukord

**1 Jadad** **3**

**2 Diferentsiaalarvutus** **9**

**3 Integraalarvutus** **19**

**4 Diferentsiaalvõrrandid ja read** **25**

**5 Segaülesanded** **28**

**6 Lahendused** **35**

# Eessõna

## Kasutatud sümboolikat

# Peatükk 1

# Jadad

1. Arvutada piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

2. Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$,

$$a_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\dots(4n+1)}{2n(2n+2)\dots 4n},$$

koondub ja leida $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. On teada, et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Tõestada, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} = g.$$

4. On antud jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kusjuures

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = g.$$

Tõestada, et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = g$.

5. Olgu antud jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus $a_n > 0$ ning $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ ($g$ on lõplik või lõpmatu). Tähistame

$$\beta_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}.$$

Tõestada, et jada $\{\beta_n : n \geqslant 1\}$ koondub ning $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = g$.

6. On antud jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Vaatleme lauseid:

(A1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) = a$, kus $a$ on lõplik;

(A2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = b$, kus $b$ on lõplik;

(A3) jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ koondub.

Missugused alljärgnevatest lausetest on tõesed?

a) (A1) $\Rightarrow$ (A3);

b) (A2) $\Rightarrow$ (A3);

c) (A1) $\wedge$ (A1) $\Rightarrow$ (A3)?

7. Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus $a_{n+1} = \dfrac{2}{2 - a_n}$ ja $a_n \neq 2$, on perioodiline.

8. Näidata, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{2k+1}{2k^2 + 2k + 1} \right)^2,$$

koondub.

9. Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{n^2 + k},$$

on hääbuv jada.

10. Iga naturaalarvu $n \geqslant 2$ korral leidub jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ jaoks $k \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{a_k}{2}.$$

Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ on hääbuv jada.

11. Jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ puhul on teada, et $a_n > 0$ ning

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2} \left( a_1 + a_2 + \cdots + a_n \right).$$

Defineerime jada $\{b_n : n \geqslant 1\}$ järgmiselt:

$$b_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Tõestada, et

a) jada $\{b_n : n \geqslant 1\}$ on monotoonne;

b) jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ on hääbuv jada.

12. Defineerime kaks arvjada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ ja $\{b_n : n \geqslant 1\}$, kusjuures

$$\begin{aligned} a_n &:= 1 + \frac{n(n+1)}{1+n^2} + \frac{n^2(n^2+1)}{1+n^4} + \ldots + \frac{n^n(n^n+1)}{1+n^{2n}}; \\ b_n &:= \left(\frac{a_n}{1+n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}. \end{aligned}$$

Leida $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

13. Olgu $x_1$ ja $x_2$ ruutvõrrandi $x^2 - 2px + 1 = 0$, $p \in \mathbb{N}$, lahendid. Tähistame $S_n := x_1^n + x_2^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus $a_n := \dfrac{S_n}{n!}$, koondub ja leida $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

14. Tõestada, et jada, mille üldliige on

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}},$$

koondub ja leida selle jada piirväärtus.

15. Koondugu jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ arvuks $a \neq 0$ ning olgu antud reaalarv $k$, $0 < k < |a|$. Näidata, et leidub $N_0$ nii, et $|a_n| \geqslant k$, $\forall n \geqslant N_0$.

16. Jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ üldliige on $a_n = \sin n$. Tõestada, et jada hajub.

17. Arvjada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ on antud rekurrentsete seostega

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}).$$

Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ koondub ja leida selle jada piirväärtus.

18. Arvjada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ on defineeritud seostega

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

Jada liikmed $a_1$ ja $a_2$ on fikseeritud. Leida $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

19. Olgu jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ puhul teada, et

$$\lim_{n\to\infty} (2a_{n+1} - a_n) = 0.$$

Leida $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

20. Jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ on defineeritud järgmise rekurrentse seosega:

$$a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}, \qquad a_1 = 1.$$

Leida $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n - \sqrt{n}\right)$.

21. On antud jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kusjuures

$$a_{n-1} - a_n = \frac{n}{(n+1)!}, \qquad a_0 = 2.$$

Tõestada, et see jada koondub ja leida selle piirväärtus. Leida samuti

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)! \ln a_n.$$

22. On antud jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus

$$a_n = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right).$$

Tõestada, et see jada koondub ja leida selle piirväärtus.

23. On antud jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Moodustame jada $\{b_n : n \geqslant 1\}$, kus $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{1+a_n}$. Teades, et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, leida $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

24. Olgu $0 < a < 1$ fikseeritud reaalarv ning $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, $n \geqslant 1$. Tõestada, et jada $\{b_n = na_n : n \geqslant 1\}$ koondub ja ta piirväärtus on 1.

25. Reaalarvude jada $\{a_n : n \geqslant 0\}$ liikmed rahuldavad tingimust

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots. \tag{1.1}$$

Jada $\{b_n : n \geqslant 1\}$ on defineeritud järgmiselt:

$$b_n := \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{i-1}}{a_i}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_i}}.$$

Tõestada, et

1) $0 \leqslant b_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Iga $0 \leqslant C < 2$ puhul leidub jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, mis rahuldab tingimust (1.1) nii, et $b_n > C$ lõpmatult paljude indeksi $n$ väärtuste korral.

26. Jadas $\{a_n : n \geqslant 1\}$

$$a_1 = A, \qquad a_2 = B \quad 0 < B < A, \quad \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ koondub ja leida selle piirväärtus.

27. Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus

$$a_n = \sin\left(2+\sqrt{3}\right)^n \pi,$$

koondub ja leida selle piirväärtus.

28. On antud jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus

$$a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Tõestada, et jada koondub ning leida selle piirväärtus.

29. Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{2 + a_n^2}{2a_n},$$

on kahanev.

30. Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kus $a_1 = m > 0$ ning kehtib seos $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + a_n$, on tõkestamata.

31. Arvutada piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}.$$

32. Arvutada piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}},$$

kus radikaal esineb $n$ korda.

33. Arvutada piirväärtus

$$A := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}\right).$$

34. Tõestada võrratus

$$\lim_{n\to\infty}\left(n(n+1)^{\frac{1}{n}} - n - \ln n\right) < 0{,}6.$$

# Peatükk 2

# Diferentsiaalarvutus

35. Konstrueerida funktsiooni $y = x \cdot \arcsin(\sin x)$ graafik.

36. Kujutada joonisel punktihulgad:

a) $\max(x, y, x+y) = 1$;

b) $\min\{\max(x,y), x+y\} = 1$;

c) $\min\{\max(|x|, |y|), |x|+|y|-1\} = 2$.

37. Kujutada joonisel punktide $(x, y)$ hulk:

a) $\min\left(x-y, y+x^2\right) \geqslant \max\left(y, y-x^2+2\right)$;

b) $\max(x,y) \geqslant \max(x+y, x-y)$;

c) $\max\left(x, xy^2\right) \geqslant \max\left(y, x^2 y\right)$.

38. Olgu antud mittekonstantne perioodiline funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tõestada, et leidub niisugune reaalarv $K > 0$, mille puhul funktsiooni iga periood $T \neq 0$ rahuldab võrratust $|T| \geqslant K$.

39. Tõestada, et $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

Ülesandeis 40–45 leida piirväärtused.

40.

$$\lim_{x \to \infty} \left( \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x + \frac{1}{x} \right)^x .$$

41.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$$

42.

$$\lim_{x\to e}\frac{\sqrt[3]{\ln x}+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{e}\right)^2-2}}{\sin x-\sin e}.$$

43.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.$$

44.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}.$$

45.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{6+x}}{\sqrt[4]{3x-5}-1}.$$

46. On teada, et

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right)=0.$$

Leida $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

47. Funktsioon $f$ on diferentseeruv punktis $x_0$. Leida piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{i}{n^2}\right)-nf(x_0)\right).$$

48. Arvutada funktsiooni

$$f(x)=\frac{1-\prod_{k=1}^{n}\cos^{a_k} kx}{x^2}$$

piirväärtus protsessis $x\to 0$ ($a_k\in\mathbb{Q}$, $k=1,\ldots,n$).

49. Tõestada, et Dirichlet' funktsioon

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,}\\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv,}\end{cases}$$

on esitatav kujul

$$D(x) = \lim_{m\to\infty} \left( \lim_{n\to\infty} \cos^n (\pi m! x) \right).$$

50. On teada, et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Tõestada, et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

51. Tõestada võrratus:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}, \qquad \text{kui } x > 0.$$

52. $P(x)$ on erinevate reaalarvuliste nullkohtadega $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polünoom. Tõestada, et kehtib võrdus

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} = 0.$$

53. Tõestada, et kui funktsioon $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$ on diferentseeruv kõikide $x > a$ korral ning

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0,$$

siis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

54. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ on subaditiivne[1] hulgal $\mathbb{R}$ ning jada $\{x_n : n \geqslant 1\}$ on niisugune, et

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{1+f(x_i)} \right) = 0.$$

Tõestada võrdus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{1+f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} = 0.$$

55. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv iga $x \in \mathbb{R}$ puhul ning

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

[1] Reaalmuutuja funktsioon $f$ on subaditiivne hulgal $\overline{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$, kui $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Tõestada, et funktsioon

$$g(x) := \begin{cases} f'\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

omab algfunktsiooni hulgal $\mathbb{R}$.

56. Funktsioon $f$ on pidev lõigul $[a,b]$. Tõestada, et siis funktsioon $|f|$ on samuti pidev lõigul $[a,b]$.

57. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on hulgal $\mathbb{R}$ subaditiivne ja $f(0) = 0$. Tõestada, et kui funktsioon $f$ on pidev punktis $x = 0$, siis ta on pidev ka kogu hulgal $\mathbb{R}$ (vt. ülesanne 54).

58. Vahemikus $(0,1)$ on defineeritud funktsioon[2]

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, \text{ kus } \frac{p}{q} \text{ on taandumatu murd,} \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Tõestada, et $f(x)$ on pidev kõikides irratsionaalsetes punktides ja katkev kõikides ratsionaalsetes punktides.

59. Uurida funktsiooni

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pidevust ja diferentseeruvust.

60. Uurida funktsiooni

$$y = \lim_{n\to\infty} (x \arctan(n \cot x))$$

pidevust.

61. Funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kohta on teada, et

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

mis tahes $x, y \in \mathbb{R}$ korral. Tõestada, et leidub $u \in \mathbb{R}^+$ nii, et $|x| \leqslant u$ korral kehtib võrratus $|f(x)| \leqslant u$.

62. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pidev ja kahanev ning on olemas piirväärtused $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Tõestada väide: iga $d > 0$ korral leiduvad reaalarvud $x_1$ ja $x_2$ nii, et $x_1 - x_2 = d$ ja $f(x_1) = f(x_2)$.

63. Funktsioon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on $n$ korda diferentseeruv lõigul $[0,1]$ ning arvud $f(0), f\left(\dfrac{1}{n}\right)$,

[2] $\mathbb{I}$ – irratsionaalarvude hulk

$f\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, f\left(\frac{n}{n}\right)$ moodustavad aritmeetilise jada, kusjuures $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tõestada, et eksisteerib $\theta \in (0,1)$ nii, et $f^{(n)}(\theta) = 0$.

64. Funktsioon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on pidev lõigul $[0,1]$ ning diferentseeruv vahemikus $(0,1)$, kusjuures $f(0) = f(1) = 0$. On teada, et mingi $x_0 \in (0,1)$ puhul kehtib võrdus $f(x_0) = 1$. Tõestada, et leidub $c \in (0,1)$, mille puhul $\left|f'(c)\right| > 2$.

65. Funktsioon $f : [0,2] \to \mathbb{R}^+$ on diferentseeruv lõigul $[0,2]$, $f(0) = 0$ ning $f(x) > 0$, $\forall x \in (0,2)$. Tõestada, et lõigul $[0,2]$ leidub punkt $c$, mille puhul

$$f'(c) = \frac{f(c)}{1-c}.$$

66. Olgu $0 \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ ning funktsioon $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $x = 0$. Tõestada, et funktsioon $g(x) = f(|x|)$, $x \in \mathbb{K}$, on diferentseeruv punktis $x = 0$ parajasti siis, kui $f'(0) = 0$.

67. On antud funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ning $g(x) = \lfloor x \rfloor f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tõestada, et $f(x)$ on pidev punktis $n \in \mathbb{Z}$ parajasti siis, kui $g(x)$ on pidev punktis $n$ ning $f(n) = 0$.

68. On antud funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ning $g(x) = \lfloor x \rfloor f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tõestada, et $f(x)$ on diferentseeruv punktis $n \in \mathbb{Z}$ parajasti siis, kui $g(x)$ on diferentseeruv punktis $n$ ning $f'(n) = 0$.

69. Olgu $f(x)$ reaalarvuliste nullkohtadega $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taandatud $n$-astme polünoom. Eksisteerib $M > 0$ nii, et $x_i < M$ $(i = 1, \ldots, n)$. Näidata, et suvalise kahe funktsiooni $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaoks kehtib tingimus

$$u(x)f'(x) > nv(x)f(x),$$

kui iga $x > M$ korral funktsioonid $u$ ja $v$ rahuldavad võrratust

$$u(x) > v(x)\,(x - x_i)\,, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

70. Tõestada, et kui mittelineaarne funktsioon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on lõigul $[a,b]$ diferentseeruv, siis leidub punkt $c \in (a,b)$, mille puhul

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| < \left|f'(c)\right|.$$

71. funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on hulgal $\mathbb{R}$ diferentseeruv, ülaltl tõkestatud. Tõestada, et kui $f'$ hulgal $\mathbb{R}$ kasvab, siis funktsioon $f$ on hulgal $\mathbb{R}$ konstantne.

72. Olgu $\alpha > 1$ korral defineeritud funktsioon

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{\alpha} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Tõestada, et eksisteerib $f'(0)$ ning $f'(0) = 0$.

73. Tõestada, et hulgal $\mathbb{R}$ ei leidu diferentseeruvat funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille puhul kehtiksid järgmised võrdused:

1) $f'(1) = 1$;
2) $f^3(1+x) = f^2(1-x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$.

74. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pidev, kusjuures

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tõestada, et $f$ on konstantne hulgal $\mathbb{R}$.

75. Funktsioon $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv lõigul $[-1,1]$, kusjuures

a) $f(0) = 0$;
b) eksisteerib $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{x}$;
c) $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$.

Tõestada, et leidub $c \in (-1,1) \setminus \{0\}$, mille puhul

$$\frac{c}{2}\left(f(1) + f(-1)\right) + \frac{f(c)}{c} = f'(c).$$

76. Funktsioon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $0 < a < b$, on diferentseeruv vahemikus $(a,b)$ ja pidev punktides $x = a$ ja $x = b$. Tõestada, et kui leidub $c \in (a,b)$, mille puhul kehtib võrdus

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c).$$

77. Olgu antud funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis iga $x_1$ ja $x_2$ korral rahuldab võrratust

$$\sqrt{|f(x_1) - f(x_2)|} \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Tõestada, et funktsioon $f(x)$ on konstantne hulgal $\mathbb{R}$.

78. Funktsioon $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv paarisfunktsioon lõigul $[-1,1]$. Leida $f'(0)$.

79. Tõestada, et iga lõigul $[a,b]$ pideva funktsiooni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korral leidub punkt $c \in (a,b)$, mille puhul

$$f(c) = \frac{a + b - 2c}{(c-a)(c-b)}.$$

80. Olgu $y = f(x)$ selline lõigul $[a,b]$ pidev funktsioon, et $f(a) = f(b)$ ning olgu $Y = [m,M]$ funktsiooni väärtuste hulk. Tõestada, et funktsioon $y = f(x)$ omandab iga väärtuse $p \in (m,M)$ vähemalt kahes punktis.

81. Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev lõigul $[0,1]$ ning $f(0) = f(1) = 0$. Tõestada, et võrrandil

$$f(x+a) - f(x) = 0$$

leidub lahend iga $a = \frac{1}{n}$ korral, kus $n \in \mathbb{N}$.

82. Olgu $y = f(x)$ selline vahemikus $(a,b) \subset \mathbb{R}$ pidev funktsioon, et $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ ja $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = -\infty$ (või $-\infty$ ja $+\infty$). Tõestada, et funktsioon $y = f(x)$ omandab iga väärtuse $p \in \mathbb{R}$.

83. Olgu $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ sellised lõigul $[a,b]$ pidevad funktsioonid, et $f(a) > g(a)$ ja $f(b) < g(b)$. Tõestada, et leidub selline punkt $c \in (a,b)$, mille puhul $f(c) = g(c)$.

84. On antud funktsioon

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(x - \alpha_i)}{i^2},$$

kus $\alpha_i$ ($i = 1, \ldots, n$) on konstandid. Tõestada, et kui $f(a) = f(b) = 0$, siis

$$a - b = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

85. Funktsioon $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ on vahemikus $(a,b)$ kaks korda diferentseeruv, kusjuures $f'(a) = f'(b) = 0$. Tõestada, et leidub $c \in (a,b)$, mille puhul

$$\left|f''(c)\right| \geqslant \frac{2}{(b-a)^2} \left|f(b) - f(a)\right|.$$

86. Tõestada võrratus

$$\pi^x \geqslant 1 + x \ln \pi.$$

87. Leida niisugune kaks korda $x$ ja $y$ suhtes diferentseeruv funktsioon

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

et

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x) - f^2(y).$$

88. Leida kõik diferentseeruvad funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ nii, et $f(x) - f(y) = (x - y) f'\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

89. Tõestada, et pidev funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimust

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^{\alpha}$$

suvaliste $x, y \in \mathbb{R}$ ja mingi $\alpha > 1$ korral, on konstantne.

90. Leida kõik diferentseeruvad funktsioonid, mille jaoks kehtib võrdus

$$f(x) + f(y) = f(x+y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

puhul.

91. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rahuldab tingimusi:

1) $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
2) $f$ on diferentseeruv hulgal $\mathbb{R}$;
3) $f'(0) = 1$.

Tõestada, et

$$f'(x) - f(x) = e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

92. Leida vähim positiivne arv $\alpha$ nii, et $x \geqslant 0$ puhul kehtiks võrratus

$$1 + x^2 \leqslant e^{\alpha x}.$$

Ülesandeis 93–96 tõestada võrratus.

93.

$$x(1 + 2\cos x) \leqslant \sin x (2 + \cos x), \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

94.

$$\frac{e}{2x+2} < e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \frac{e}{2x+1}, \qquad x > 0.$$

95.

$$be^{-ax} - ae^{-bx} < b - a, \qquad \text{kus } 0 < a < b, x < 0.$$

96.

$$\left|\frac{\sin x}{2+\cos x}\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

97. Võrdhaarse kolmnurga aluse pikkus on $a$ ja alusnurga poolitaja pikkus on $c$. Tõestada võrratused

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{a}{c} < \frac{3}{2}.$$

98. Funktsioonil $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on punktis $x_0$ miinimum. Tõestada või lükata ümber lause: $f$ kasvab monotoonselt vahemikus $(x_0, x_0+\varepsilon)$ ning kahaneb monotoonselt vahemikus $(x_0-\varepsilon, x_0)$, kus $\varepsilon > 0$ on suvaline etteantud arv.

99. Tõestada võrratus

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1,$$

kui $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. (USA matemaatika olümpiaad, 1980.)

100. Uurida funktsiooni

$$y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$$

ekstreemumeid.

101. Leida funktsiooni

$$u = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}} + \frac{2}{x_n}$$

($x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$) ekstreemumeid.

102. Võrratuste süsteemi

$$\begin{cases} 3x + 2y \geqslant 12, \\ x - y \leqslant 6, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

lahendite hulgal leida punkt, milles funktsiooni

$$f(x, y) = 9(x-2)^2 + 4(y-1)^2$$

väärtus on minimaalne.

103. Leida

$$\max_{x,y\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{1+x+y}-\frac{1}{(x+1)(y+1)}\right).$$

104. $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$ on mittenürinurkse kolmnurga sisenurgad. Tõestada, et

$$1\leqslant\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

105. Tõestada, et igas kolmnurgas kehtivad võrratused:

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

b) $2<\cos^{\frac{\alpha}{2}}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{9}{4}$;

c) $\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\leqslant\frac{9}{4}$.

106. Olgu $E$ tõkestatud mõõtuv kujund tasandil. Tõestada, et leidub sirge, mis jaotab kujundi $E$ kaheks pindvõrdseks osaks.

107. Olgu $E$ tõkestatud mõõtuv kujund tasandil ja $P$ mingi punkt samal tasandil ($P\notin E$). Tõestada, et leidub punkti $P$ läbiv sirge, mis jaotab kujundi $E$ kaheks pindvõrdseks osaks.

# Peatükk 3

# Integraalarvutus

108. Leida pidev funktsioon $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ nii, et kehtiks võrdus

$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(x), \qquad x > 0.$$

109. Leida piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n^2+1^2)\cdot(n^2+2^2)\dots(n^2+n^2)}}{n^2}.$$

110. Tõestada kahekordne võrratus

$$\frac{3^n}{n+1} \leqslant \int_0^1 \left(x^2+x+1\right)^n dx \leqslant 3^n.$$

111. Olgu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ lõigul $[a,b]$ pidev funktsioon. Tõestada, et siis leidub punkt $c \in (a,b)$, mille puhul

$$\int_a^c f(t)\,dt = \frac{(c-a)(c-b)f(c)}{a+b-2c}$$

(vt. ülesanne 79).

112. Funktsioon $f : [a,b] \to [a,b]$ on sürjektiivne ja diferentseeruv lõigul $[a,b]$. Tõestada, et leiduvad punktid $x_i \in [a,b]$ $(i = 1,2,3,4)$ nii, et kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)f'(x_2)\,(x_3 - x_4)\,.$$

(Funktsioon $f : [a,b] \to [a,b]$ on sürjektiivne, kui funktsiooni igale väärtusele lõigul $[a,b]$ vastab vähemalt üks argumendi väärtus samal lõigul.)

113. Tõestada, et iga $x \in [0,1]$ puhul kehtib võrratus:

$$\left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

114. Leida piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos\frac{i}{n} \cos\frac{j}{n}$.

115. Funktsioonide $F_1, F_2, \ldots, F_n : [0,a] \to \mathbb{R}$ kohta on teada, et:

1) $F_1$ on pidev ja kasvav lõigul $[0,a]$, $a > 0$;

2) $F_{n+1}(x) = \int_0^x F_n(t)\,dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ja $\forall x \in [0,a]$.

Tõestada, et

$$F_{n+1}(x) \geqslant \frac{x^n}{n!} F_1(0), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

116. Tõestada kahekordne võrratus

$$\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

117. Funktsioon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on lõigul $[0,1]$ kasvav ja pidev. Tõestada, et iga $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ puhul kehtib võrratus

$$n \int_0^1 \sqrt[n]{f'(x)}\,dx \leqslant f(1) - f(0) + n - 1.$$

118. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pidev. Iga $x \in \mathbb{R}$ puhul on defineeritud funktsioon

$$g(x) := f(x) \int_0^x f(t)\,dt.$$

Tõestada, et kui $g(x)$ on kahanev, siis $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

119. Tõestada, et $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrdus:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_k^k}{2k+1} = \prod_{s=1}^{n} \frac{2s}{2s+1}.$$

120. Funktsioon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on kaks korda diferentseeruv ja pidev lõigul $[0,1]$. Tõestada, et leidub $c \in (0,1)$, mille puhul kehtib võrdus

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \frac{f'(1)}{2} + \frac{f''(c)}{6}.$$

121. Funktsioon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on vahemikus $(a,b)$ kaks korda diferentseeruv, $f(a) = f(b) = 0$ ning $f(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$.

1. Tõestada, et leiduvad $c_1 < c_2$, $c_1, c_2 \in (a,b)$, mille puhul

$$f'(c_1) - f'(c_2) \geqslant \frac{4A}{b-a}, \qquad \text{kus } A := \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

2. Teades, et eksisteerib

$$\int_a^b \frac{|f''(x)|}{f(x)}\,dx,$$

tõestada võrratus

$$\int_a^b \frac{|f''(x)|}{f(x)}\,dx \geqslant \frac{4}{b-a}.$$

122. Hulgal $\mathbb{R}$ on määratud hulkliikmed $P(x)$ ja $Q(x)$, mis $x$ kõikide positiivsete väärtuste korral on positiivsed. Tõestada, et eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} \int_0^x \ln \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt, \qquad p > 1$$

ja leida see.

123. Funktsioon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omab pidevat tuletist hulgal $[a,b]$, kusjuures

$$f'(x) = f'(a+b-x), \qquad \forall x \in [a,b].$$

Tõestada, et

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

124. Funktsioon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on pidev lõigul $[0,1]$ ning

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Tõestada, et leidub $c \in (0,1)$, mille puhul

$$\frac{1}{1+c} < f(c) < \frac{1}{2c}.$$

125. Jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ on defineeritud seosega

$$a_{n+1} = \int_0^{a_n} c^{x^2}\, dx, \qquad a_1 = 1,$$

kus $c > 0$, $c \neq 1$. Määrata need $c$ väärtused, mille puhul jada koondub ja leida selle jada piirväärtus.

126. On antud positiivsete liikmetega kasvav jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$, kusjuures

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{x^k}{1+x^k}\, dx = a$$

ning $k > 1$. Tõestada, et koondub jada $\{b_n : n \geqslant 1\}$, kus $b_n := \dfrac{a_n}{n}$ ja leida selle jada piirväärtus.

127. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pidev ja paaritu. Tõestada, et iga reaalarvu $x_0 \neq 0$ korral leiduvad reaalarvud $x_1$ ja $x_2$, $|x_1| < |x_0|$, $|x_2| < |x_0|$, $x_1 < x_2$ nii, et

$$f(x_2) = \frac{x_1}{x_1 - |x_0|}.$$

128. Funktsioon $f : [a-r, a+r] \to \mathbb{R}$ on pidev hulgal $[a-r, a+r]$ ning $\forall x$, $|x| \leqslant r$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ puhul kehtib võrdus $\alpha f(a+x) + \beta f(a-x) = \gamma$. Näidata, et siis kehtivad ka võrdused:

1) $\displaystyle\int_{a-r}^{a+r} f(x)\, dx = \frac{2\gamma}{\alpha+\beta} r$, $\alpha + \beta \neq 0$;

2) $\displaystyle\int_{a-r}^{a+r} f(x)\, dx = \frac{\gamma}{\alpha} r + \frac{\alpha-\beta}{\alpha} \int_a^{a+r} f(x)\, dx.$

129. Funktsioon $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ on pidev lõigul $[0, b-a]$ ($a < b$). Leida integraal

$$\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a) + f(b-x)}\, dx.$$

130. Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on paaritu ja perioodiline (perioodiga $T \neq 0$) ning omab pidevat tuletist. Arvutada integraal

$$I = \int_0^{2T} \frac{x f'(x)}{1 + f^2(x)}\, dx.$$

131. Funktsioon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on paaritu, hulgal $\mathbb{R}$ diferentseeruv perioodiline funktsioon (perioodiga $T\neq 0$). Tõestada, et

$$\int_0^{2T} xf^2(x)f'(x)\,dx=0.$$

132. Funktsioonid $f,F:[0,a]\to\mathbb{R}$ on defineeritud lõigul $[0,a]$, kusjuures $f$ on sellel lõigul pidev ja kasvav;

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\qquad \forall x\in[0,a],\, a>0.$$

Tõestada, et $\displaystyle\int_0^a F(t)\,dt\geqslant\frac{a^2}{2}f(0).$

133. Leida diferentseeruv funktsioon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mille puhul

$$f(x)=x^2+\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt,\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

134. Funktsioon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ on pidev lõigul $[a,b]$. Tõestada võrratus

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx,\qquad a<b.$$

135. Tõestada, et iga $n\in\mathbb{N}$ puhul kehtib võrratus

$$(n!)^2<n^{\frac{n^2}{2}+n}e^{\frac{1-n^2}{4}}.$$

136. Tõestada, et iga pideva funktsiooni $f:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ korral leiduvad arvud $x_i\in[0,1]$, $i=1,\dots,n$, mille puhul $x_i-x_{i-1}\leqslant\dfrac{2}{n}$ ja

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f^2(x_i).$$

137. Funktsioon $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ on pidev hulgal $\mathbb{R}^+$ ning leidub $a\in\mathbb{R}^+$, mille puhul

$$a\int_0^x f^2(t)\,dt\leqslant\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2.$$

Tõestada, et $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$.

138. Funktsioon $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ on lõigul $[a,b]$ pidev. Tõestada, et

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\int_a^b (f(x))^{2n}\,dx}=M,$$

kus $M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$.

139. Arvutada integraal

$$I := \iint_D |x+y| \, dx\, dy,$$

kus $D = [0,2] \times [0,2]$.

140. Leida joonega $(x+2y-5)^2 + (2x+y+3)^2 = 25$ piiratud kujundi pindala.

141. Leida joontega

$$y = \frac{1}{x^3}, \qquad y = \frac{4}{x^3}, \qquad y = 4x, \qquad y = 9x$$

piiratud kujundi pindala.

142. Funktsioon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on pidev lõigul $[0,1]$. Tõestada võrdus

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^x f(x)f(y)f(z)\, dx\, dy\, dz = -\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)^3.$$

# Peatükk 4

# Diferentsiaalvõrrandid ja read

143. Tõestada, et kui $y_1$ ja $y_2$ rahuldavad võrrandit

$$y' + Py = Q,$$

kus $P$ ja $Q$ on ühe muutuja $x$ funktsioonid, siis

$$y_2 = y_1 + ay_1 \exp\left(-\int \frac{Q}{y_1}\,dx\right),$$

kus $a$ on suvaline konstant.

144. Määrata funktsioon $y \in C^2$ nii, et oleks täidetud tingimus

$$y(x) = 1 + \lambda \int_0^x (t - x)\,y(t)\,dt,$$

kus $\lambda$ on konstant.

145. Võrrandi $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x,y)$ esimene integraal on

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y,c).$$

Tõestada, et sel juhul võrrandi üldintegraal omab kuju

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial c}\,(dy - \varphi dx) = A,$$

kus $A$ on konstant.

146. Lahendada võrrand

$$y' \cos y = x - \sin y.$$

147. Leida kaks korda diferentseeruv funktsioon $y$ ($y \neq 0$), mis rahuldab võrdust $yy'' - yy' = \big(y'\big)^2$.

148. Lahendada võrrand

$$\int_0^a \Big(\big(y_t'(xt)\big)^2 + y^2(xt)\Big)\,dt = y^2(x),$$

kus $y$ on kõikjal diferentseeruv.

149. Tõestada, et kui $y_1$ ja $y_2$ on homogeense lineaarse teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

lineaarselt sõltumatud erilahendid, siis

$$p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

ja

$$p_2(x) = -\frac{y_1''}{y_1} + \frac{y_1'}{y_1} \cdot \frac{W'(x)}{W(x)},$$

kus $W(x)$ on Wronski determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

150. Tõestada, et rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_{k+n}^n}$, $k \geqslant 2$, koondub ja leida selle rea summa.

151. Tõestada, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\frac{\lfloor n!e \rfloor - 1}{n} \in \mathbb{N}.$$

152. Tõestada võrratus $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < \pi\sqrt{\frac{n}{6}}$.

153. Tõestada, et kui koondub rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, siis koondub ka rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

154. Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, hajub. Tõestada, et iga $\alpha \in (0,1)$ korral hajub ka rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$.

Ülesandeis 155–160 uurida antud rea koonduvust.

155.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

156.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{6\cdot 2^n + 4\cdot 3^n}.$$

157.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}.$$

158.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

159.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}.$$

160.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right).$$

161. Arendada funktsioonid

a) $y = \arcsin(\sin x)$;

b) $y = \arctan(\tan x)$

Fourier' ritta.

# Peatükk 5

# Segaülesanded

162. Esitada koordinaattasandil punktihulk

$$K = \{(x,y) \,:\, \max(|x|,|y|) \leqslant 2,\, |x|+|y| \geqslant 1\}.$$

163. On antud funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 3+x, & x \leqslant 0, \\ 3-x, & x > 0. \end{cases}$$

Leida funktsioon $f(f(x))$ ning konstrueerida selle graafik.

164. Konstrueerida funktsioonide graafikud:

1) $y = |x| \operatorname{sgn} x$;

2) $y = \underbrace{\operatorname{sgn}\operatorname{sgn}\ldots\operatorname{sgn}}_{k} x$;

3) $x^3 + 3xy + y^3 = 1$.

165. Konstrueerida funktsiooni

$$y = \min\left(|x|, \frac{1}{|x|}\right)$$

graafik.

166. Konstrueerida funktsiooni

$$y = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leqslant 0, \\ \max_{0 \leqslant t \leqslant x}\left(t - t^2\right), & \text{kui } x > 0, \end{cases}$$

graafik. Leida võrrandi

$$4 \max_{0 \leqslant t \leqslant x} \left(t - t^2\right) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

lahendid.

167. Konstrueerida funktsiooni

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, \qquad x > 0, n \in \mathbb{N},$$

graafik.

168. Konstrueerida funktsiooni

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n \left|\sin \pi x\right| + x^{-n} \left|\cos \pi x\right|}{x^n + x^{-n}}$$

graafik vahemikus $(0, 2]$ ning arvutada selle graafiku ja $x$-telje lõiguga piiratud kujundi pindala.

169. Milliste $n \in \mathbb{N}$ väärtuste korral funktsiooni

$$f(x) = \frac{\sin nx}{\sin \frac{x}{n}}$$

periood on $3\pi$?

170. On antud funktsioonid

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{kui } x < 0, \\ f(x-1) + 1, & \text{kui } x \geqslant 0 \end{cases}$$

ja

$$g(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{kui } x < \frac{1}{2}, \\ g(x-1) + 1, & \text{kui } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lahendada võrrand

$$f(x) = g(x).$$

171. Teades, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ ja $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, tõestada võrdus

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}.$$

Ülesandeis 172–174 leida piirväärtus.

172.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}.$$

173.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\cos x-x}}.$$

174.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^n},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

175. Olgu antud jada $\{a_n : n\geqslant 1\}$, kusjuures

$$a_n = na_{n-1}+(-1)^n,\qquad a_1\in\mathbb{N}.$$

Tõestada, et $a_n$ jagub $(n-1)$-ga, kui $n\geqslant 2$.

176. On antud kaks jada $\{a_n : n\geqslant 1\}$ ja $\{b_n : n\geqslant 1\}$, kusjuures

$$b_n = a_n+2a_{n-1}.$$

Jada $\{b_n : n\geqslant 1\}$ koondub. Kas koondub siis ka jada $\{a_n : n\geqslant 1\}$?

177. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ positiivsete reaalarvude jada, kusjuures iga $n\in\mathbb{N}$ korral kehtib võrratus $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$. Tõestada, et $a_n\leqslant\dfrac{1}{n}$ iga $n\in\mathbb{N}$ korral.

178. On antud jadad $\{a_n : n\geqslant 1\}$ ja $\{b_n : n\geqslant 1\}$, kusjuures

$$a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+1},\qquad a_1=1$$

ja

$$b_n=\frac{a_n}{2^n}.$$

Tõestada, et jada $\{b_n : n\geqslant 1\}$ koondub.

179. Jada $\{a_n : n\geqslant 0\}$ on defineeritud seosega

$$a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+4^{-n}}}{2};\qquad a_0=1.$$

Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 0\}$ koondub.

180. Jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ on defineeritud seosega:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{a_n}}; \qquad a_1 = 1.$$

Tõestada, et jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ hajub ning $a_{16000} < 40$.

181. On antud kaks jada $\{a_n : n \geqslant 0\}$ ja $\{b_n : n \geqslant 1\}$, kusjuures

$$b_n = 2a_n + a_{n-1} \qquad \text{ning} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Tõestada, et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{b}{3}$.

182. Jada $\{x_n : n \geqslant 1\}$ on defineeritud seosega $x_{n+1} = x_n + (x_n - c)^2$, $x_1 = 0$. Milliste $c$ väärtuste korral jada koondub?

183. Jada $\{a_n : n \geqslant 1\}$ on defineeritud seosega $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $a_1 = a$. Milliste $a$ väärtuste korral jada koondub?

184. Leida $y^{(101)}$, kui $y = x^{\frac{1}{x}}$.

185. Arvutada $f'(0)$, kui $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, $n \in \mathbb{N}$.

186. On antud funktsioonid

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{kui } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

ja

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & \text{kui } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

($\mathbb{Q}$ tähistab ratsionaalarvude hulka, $\mathbb{I}$ – irratsionaalarvude hulka). Kumb neist funktsioonidest omab tuletist punktis $x = 0$?

187. Tõestada, et võrrandil

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin^4 x} = m$$

on üks ja ainult üks lahend vahemikus $(0, \pi)$ tingimusel $\tan\alpha > 0{,}75$ ($\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$) ning $m > 0$.

188. Leida kõik diferentseeruvad funktsioonid $f$ nii, et kehtiks võrdus

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

189. Leida kõik diferentseeruvad funktsioonid $f$ nii, et kehtib võrdus $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$, $f(1) = 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

190. Leida kõik $a$ väärtused, mille puhul funktsioonil

$$f(x) = \left(a^2 - 3a + 2\right)\cos\frac{x}{2} + (a-1)x + \sin 1$$

ei ole kriitilisi punkte.

191. Leida kõikjal positiivne diferentseeruv funktsioon $f$ nii, et kui arvud $a, b, c \in \mathbb{R}$ moodustavad aritmeetilise jada, siis arvud $f(a)$, $f(b)$ ja $f(c)$ moodustavad geomeetrilise jada.

192. Lahendada võrrand

$$1987^x - 1986^x = 3973.$$

193. Lahendada võrratused

1) $x^4 < 5x + 6$;

2) $x^9 + x > x^5 + 1$.

194. Tõestada võrratused

1) $x^2 < x^3 + \frac{1}{6}$ $(x > \frac{2}{3})$;

2) $\ln(1+x) > \frac{2x}{2+x}$ $(x \geqslant 0)$;

3) $4\sqrt{x} > 5 - \frac{2}{x}$ $(x > 1)$;

4) $2\sin x - \tan x < x$ $(x > 0)$;

5) $\sin x + \tan x > 2x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$;

6) $\frac{1}{2}\sin^2 x - \cos x < x^2 - 1$ $(x > 1)$;

7) $6\sin x + \tan x > 7x - x^3$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$;

8) $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$ $(x, y, z > 0)$.

195. Paigutada kasvamise järjekorras arvud

1) $\cos 200$; $1+\cos 201$;

2) $e^{\pi}$; $\pi^{e}$;

3) $100^{101}$; $101^{100}$;

4) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$, $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

5) $3\tan 2^{\circ}$; $2\tan 3^{\circ}$; $4\tan 1^{\circ}$; $\tan 4^{\circ}$.

196. On teada, et

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n, \qquad x_i\in\mathbb{R}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Tõestada võrratus $(1+e^{x_1})(1+e^{x_2})\ldots(1+e^{x_n})\geqslant(1+e)^n$.

197. Võrdhaarse kolmnurga ümberringjoone raadius on $R$. Leida selle kolmnurga haarale joonestatud kõrguse maksimaalne pikkus. Missugune on sel juhul kolmnurga tipunurk?

198. Tetraeedri kaks vastasserva on pikkusega $x$, ülejäänud servade pikkused on 1. Millise $x$ väärtuse korral on tetraeedri ruumala suurim?

199. Leida funktsiooni $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ vähim väärtus, kui $x$ ja $y$ rahuldavad võrrandit $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$.

200. Leida funktsiooni

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x-2)^2+4}{x^2+4}}$$

suurim ja vähim väärtus.

Ülesandeis 201–205 tõestada võrratused.

201.

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{6}}-1\right)<\int_0^{\frac{\pi}{12}}e^{2\tan x}\,dx<\frac{1}{2}\ln 2.$$

202.

$$\frac{1}{2}<\int_0^1 xe^{\sin^2 x}\,dx<\frac{1}{2}(e-1).$$

203.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+x^2}\sin x\,dx < \frac{2+\pi\sqrt{4+\pi^2}}{4}.$$

204.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\cos x} < \ln 2.$$

205.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{\sin x}\,dx > \frac{8}{9}.$$

206. Arvutada

$$\int_0^{\pi} (x+1)\,\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}\,dx.$$

# Peatükk 6

# Lahendused

1. Kasutame Stirlingi valemit:

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} \cdot \exp\left(-n + \frac{\theta_n}{12n}\right), \qquad 0 < \theta_n < 1$$

ja asjaolu, et

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Saame:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2n}} (n^n)^{\frac{1}{n}} \exp\left(-1 + \frac{\theta_n}{12n^2}\right)}{n} = \frac{1}{e}.$$

2. Kasutame võrratust $n(n+2) < (n+1)^2$. Saame:

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \frac{(2n+1)^2 (2n+3)^2 \dots (4n+1)^2}{(2n)^2 (2n+2)^2 \dots (4n)^2} < \\ &< \frac{(2n+1)(2n+2)^2 (2n+4)^2 \dots (4n)^2 (4n+1)}{(2n)^2 (2n+2)^2 \dots (4n)^2} = \\ &= \frac{(2n+2)(4n+1)}{(2n)^2}; \\ a_n^2 &> \frac{(2n+1)^2 (2n+3)^2 \dots (4n+1)^2}{2n(2n+1)^2 \dots (4n-1)^2 4n} = \frac{(4n+1)^2}{2n \cdot 4n}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\frac{(4n+1)^2}{2n \cdot 4n} < a_n^2 < \frac{(2n+1)(4n+1)}{(2n)^2}.$$

Et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n+1)^2}{8n^2} = 2$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)(4n+1)}{4n^2} = 2$, siis

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.$$

3. I. Algul oletame, et $g$ on lõplik. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $k \in \mathbb{R}$ nii, et $n > k$ puhul

$$g-\varepsilon < a_{k+1} < g+\varepsilon, \quad g-\varepsilon < a_{k+2} < g+\varepsilon, \quad \ldots, \quad g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon.$$

Liites liikmeti need $n-k$ võrratust, saame:

$$(g-\varepsilon)(n-k) < \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j} < (g+\varepsilon)(n-k)$$

ehk

$$(g-\varepsilon)\cdot\frac{n-k}{n} < \frac{a_{k+1}+\cdots+a_n}{n} < (g+\varepsilon)\cdot\frac{n-k}{n}. \tag{6.1}$$

Kuid on ilmne, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_k}{n} = 0,$$

st. leidub $k_1 \in \mathbb{R}$ nii, et $n > k_1$ puhul

$$-\varepsilon < \frac{a_1+\cdots+a_k}{n} < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Olgu $\max(k, k_1) := r$. Siis $n > r$ puhul kehtivad võrratused (6.1) ja (6.2), mistõttu neid võrratusi võib liikmeti liita:

$$(g-\varepsilon)\cdot\frac{n-k}{n} - \varepsilon < \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} < (g+\varepsilon)\cdot\frac{n-k}{n} + \varepsilon.$$

Et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-k}{n} = 1$, siis küllalt suurte $n$ väärtuste korral

$$g-3\varepsilon < \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} < g+3\varepsilon.$$

Siit järeldubki, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = g.$$

II. Olgu $g = \infty$. Siis antud arvu $S > 0$ korral leidub $k$ nii, et

$$s_{k+1} > S, \quad s_{k+2} > S, \quad \ldots.$$

Seega $n > k$ puhul $a_{k+1} + \cdots + a_n > S(n-k)$ ehk

$$\frac{a_{k+1} + \cdots + a_n}{n} > \frac{n-k}{n} \cdot S.$$

Suurte $n$ väärtuste puhul aga

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k}{n} > -\frac{S}{2}.$$

Siis

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > \frac{n-k}{n} \cdot S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2} - \frac{kS}{n}.$$

Kui $n$ on küllalt suur, võime võtta $\frac{n}{k} > 6$, st. $\frac{k}{n} < \frac{1}{6}$. Siis $\frac{kS}{n} < \frac{S}{6}$ ja seega

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > \frac{S}{2} - \frac{S}{6} = \frac{S}{3}.$$

Siit järeldubki, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \infty.$$

Analoogselt võime näidata lause õigsust, kui $g = -\infty$.

*Märkus.* Pöördlause ei kehti. Tõepoolest, jada $\left\{ \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2} \; : \; n \geqslant 1 \right\}$ hajub vaatamata sellele, et jada $\left\{ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \; : \; n \geqslant 1 \right\}$ koondub arvuks $\frac{1}{2}$ (*miks?*).

4. Vaatleme jada $\{C_n \; : \; n \geqslant 1\}$, kusjuures

$$C_n = \begin{cases} a_n - a_{n-1}, & n \geqslant 2, \\ a_1, & n = 1. \end{cases}$$

Ilmselt $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = g$ ning

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} = \frac{a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})}{n} = \frac{a_n}{n}.$$

Ülesande 3 kohaselt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g.$$

5. Vaatleme jada $\{\gamma_n : n \geqslant 1\}$, kus $\gamma_n = \log a_n$. Logaritmfunktsiooni pidevusest

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} (\log a_n) = \log \lim_{n\to\infty} a_n = \log g.$$

Ilmselt

$$\log \beta_n = \frac{1}{n}\left(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n\right).$$

Ülesande 3 kohaselt

$$\lim_{n\to\infty} \log \beta_n = \log g$$

ehk

$$\log\left(\lim_{n\to\infty} \beta_n\right) = \log g$$

ehk

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = g.$$

*Märkus 1.* Kui $a_n > 0$ ning $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = g$, siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. Tõepoolest, võttes

$$d_n := \begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}}, & n \geqslant 2, \\ a_1, & n = 1, \end{cases}$$

saame

$$\beta_n = \sqrt[n]{d_1 \cdot d_2 \ldots d_n} = \sqrt[n]{a_n}.$$

Et $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = g$, siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

Tõestatust ei järeldu sugugi, et kui leidub piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, siis on olemas ka piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Näiteks jada $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ puhul $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ on olemas (*leidke see!*), samal ajal $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ puudub.

Ridade teooriast on teada kaks arvridade koonduvuse piisavat tunnust: D'Alembert'i tunnus ja Cauchy' tunnus. Kumb neist on tugevam?

*Märkus 2.* Võtame märkuses 1 $a_n = n$. Et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, siis peab olema ka $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

*Märkus 3.* Kasutades piirväärtust $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, on kerge näidata, et

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

Tõepoolest, kui $a > 1$, siis võib kirjutada

$$\frac{1}{n} < a < n$$

ehk

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n},$$

millest

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \text{kuna } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Kui $0 < a < 1$, siis tähistame

$$a := \frac{1}{p}, \quad \text{kus } p > 1.$$

Ilmselt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{p}} = \frac{1}{1} = 1$.

6. On ilmne, et lause a) on väär. Näiteks olgu

$$a_n = \ln n, \qquad n \geqslant 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siis $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[\ln(n+1) - \ln n] = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$, kuid $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ei eksisteeri.

Lause b) on samuti väär. Näiteks võtame $a_n = (-1)^{n+1}$. On ilmne, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n}{n} = 0,$$

kuid $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ei eksisteeri.

c) Tähistame: $c_n = n\,(a_{n+1} - a_n)$. Kui (A1) on tõene, siis $c_n \to a$, kui $n \to \infty$. Kui (A2) on tõene, siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = b.$$

Kuid

$$\begin{aligned}\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n} &= \frac{a_2-a_1+2(a_3-a_2)+\ldots+n(a_{n+1}-a_n)}{n} = \\ &= \frac{na_{n+1}-(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n} = \\ &= a_{n+1}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.\end{aligned}$$

Et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=b$, siis $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a+b$ ning lause c) on tõene.

7. Ilmselt $a_{n+2}=\frac{2}{2-a_{n+1}}=\frac{2}{2-\frac{2}{2-a_n}}=\frac{2-a_n}{1-a_n}$. On selge, et $a_n\neq 1$.

Kui oleks $a_n=1$, siis $a_{n+1}=\frac{2}{2-1}=2$, mis ei ole võimalik. Nüüd

$$a_{n+4}=\frac{2-a_{n+2}}{1-a_{n+2}}=\frac{2-\frac{2-a_n}{1-a_n}}{1-\frac{2-a_n}{1-a_n}}=a_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Jada periood on seega 4.

8. Algul näitame, et $a_{k+1}-a_k>0$, st. jada kasvab monotoonselt. Tõepoolest,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{2k+1}{2k^2+2k+1}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+1}{2k^2+2k+1}\right)^2=\left(\frac{2(n+1)+1}{2(n+1)^2-2(n+1)+1}\right)^2>0.$$

Jääb veel näidata, et jada on ülalt tõkestatud. Selleks lähtume kergesti kontrollitavast võrratusest

$$(a+b)^2ab<(a^2+b^2)^2,$$

kus $a$ ja $b$ on erinevad reaalarvud.

Saame:

$$\begin{aligned}\frac{(1+2)^2}{(1^2+2^2)^2} &< \frac{1}{1\cdot 2}\\ \frac{(2+3)^2}{(2^2+3^2)^2} &< \frac{1}{2\cdot 3}\\ &\ldots\\ \frac{(n+n+1)^2}{(n^2+(n+1)^2)^2} &< \frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Summeerides saame:

$$\begin{aligned} a_n &< \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1-\frac{1}{n+1} < 1. \end{aligned}$$

Seega on ülesanne lahendatud: jada koondub.

9. Vaatleme $a_n$ absoluutväärtust:

$$|a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin k}{n^2+k}\right| < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k} := b_n.$$

Ilmselt

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}}_{n \text{ liidetavat}} < b_n < \underbrace{\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}}_{n \text{ liidetavat}}.$$

Seega

$$\frac{n}{n^2+n} < b_n < \frac{n}{n^2+1},$$

millest nähtub, et

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Järelikult ka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

38. Oletame, et väide on väär. Vaatleme funktsiooni $f$ perioodide sellist jada $\{T_n : n \geqslant 1\}$, et $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$. Siis

$$0 = \frac{f(x+T_n)-f(x)}{T_n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Järelikult

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+T_n)-f(x)}{T_n} = f'(x).$$

Niisiis, $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = 0$ ja seega $f = \mathrm{const}$, mis on vastuolus eeldusega.

39. Vastavalt definitsioonile $\frac{1}{x}-1 < \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$. Kui $x > 0$, siis $1-x < x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1$; kui $x < 0$, siis $1 \leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor < 1-x$. Kerge on näha, et $\lim\limits_{x\to 0+}(1-x) \leqslant \lim\limits_{x\to 0+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1$ ehk

$\lim\limits_{x\to 0+} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1$. Analoogselt $1 \leqslant \lim\limits_{x\to 0-} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \lim\limits_{x\to 0-}(1-x)$ ehk $\lim\limits_{x\to 0-} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1$. Seega $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1$.

40. Tähistame piirväärtuse märgi all oleva avaldise tähega $y$, võtame $t := \frac{1}{x}$ ning logaritmime. Saame:

$$\ln y = \frac{\ln\left((e^t-1)\frac{1}{t}+t\right)}{t}.$$

Piirväärtuse

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left((e^t-1)\frac{1}{t}+t\right)}{t}$$

leidmiseks tuleb neli korda kasutada l'Hospitali reeglit. Tulemusena saame: $\lim\limits_{t\to 0}\ln y = \frac{3}{2}$ ehk logaritmfunktsiooni pidevuse tõttu $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y = \frac{3}{2}$, millest $\lim\limits_{x\to\infty} y = e^{\frac{3}{2}}$.

41. Tähistame: $f(x) := (1+x)^{\frac{1}{x}} - e$; $g(x) := x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e\right)' = \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{\frac{1}{x+1}x - \ln(1+x)}{x^2}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}\right) = \\
&= e\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)} = e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x} = \\
&= -e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x+2} = -\frac{1}{2}e.
\end{aligned}$$

42.

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt[3]{\ln x}-1}{\sin x - \sin e} + \lim_{x\to e}\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{x}{e}\right)^2 - 2} + 1}{\sin x - \sin e} := B + C. \\
B &= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt[3]{\ln x - \ln e + 1} - 1}{2\sin\frac{x-e}{2}\cos\frac{x+e}{2}} = \frac{1}{2\cos e}\lim_{x\to e}\frac{\sqrt[3]{1+\ln\frac{x}{e}} - 1}{\sin\frac{x-e}{2}}.
\end{aligned}$$

Et

$$\sqrt[3]{1+\ln\frac{x}{e}}-1 \sim \frac{1}{3}\ln\frac{x}{e} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x}{e}-1+1\right) \sim \frac{1}{3}\left(\frac{x}{e}-1\right) = \frac{x-e}{3e}$$

ja

$$\sin\frac{x-e}{2} \sim \frac{x-e}{2}$$

$(\lim\limits_{x\to e}(x-e)=0)$, siis

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2\cos e}\cdot\lim_{x\to e}\frac{x-e}{3e}\cdot\frac{1}{\frac{x-e}{2}} = \frac{1}{3e\cos e}. \\ C &= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{x}{e}\right)^2-1}-1+1}{\sin x-\sin e} = -\lim_{x\to e}\frac{\sqrt[3]{1-\left(\frac{x^2}{e^2}-1\right)}-1}{2\sin\frac{x-e}{2}\cos\frac{x+e}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2\cos e}\lim_{x\to e}\frac{\sqrt[3]{1-\left(\frac{x^2}{e^2}-1\right)}-1}{\sin\frac{x-e}{2}}. \end{aligned}$$

Et $\sqrt[3]{1-\left(\frac{x^2}{e^2}-1\right)}-1 \sim \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{e^2}-1\right)$, siis $C = \frac{1}{2\cos e}\lim\limits_{x\to e}\frac{\frac{1}{3}\left(x^2-e^2\right)}{e^2\cdot\frac{x-e}{2}} = \frac{2}{3e\cos e}$. Seega $A = B+C = \frac{1}{e\cos e}$.

43. Et

$$\begin{aligned} 1-\cos x\cos 2x\cos 3x &= 1-\cos x\cdot\frac{\cos x+\cos 5x}{2} = \\ &= 1-\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos x\cos 5x = \\ &= 1-\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 6x = \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 6x = \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{1}{4}(1-\cos 4x)+\frac{1}{4}(1-\cos 6x) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 3x, \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)+\sin^2 2x+\sin^2 3x}{1-\cos x} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos x}+ \\ &\qquad +\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos x} = \\ &= 14.\end{aligned}$$

44. Näpunäide: lugejas liita ja lahutada $\cos x$.

Vastus: $\frac{3}{2}$.

45. Saame:

$$A := \lim_{x\to 2}\frac{\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}-\frac{\sqrt[3]{6+x}-2}{x-2}}{\frac{\sqrt[4]{3x-5}-1}{x-2}}.$$

Asendame $x-2 := z$. Siis

$$A = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sqrt{z+4}-2}{z}-\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{z}}{\frac{\sqrt[4]{3z+1}-1}{z}} = 2\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sqrt{\frac{z}{4}+1}-1}{z}-\frac{\sqrt[3]{\frac{z}{8}+1}-1}{z}}{\frac{\sqrt[4]{3z+1}-1}{z}}.$$

Nüüd kasutame asjaolu, et $\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\dfrac{\alpha}{n}$, kui $\alpha\to 0$.

$$A = 2\lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{4}-\frac{1}{3}\cdot z8\right):z}{\frac{1}{4}\cdot(3z):z} = \frac{2}{9}.$$

46. Kui $f(x)>0$, siis $f(x)+\dfrac{1}{|f(x)|} = f(x)+\dfrac{1}{f(x)} = \left(\sqrt{f(x)}-\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2+2\geqslant 2$.

Punkti $a$ mingis punkteeritud ümbruses $U(a)$ peab kehtima võrratus $f(x)<0$. Ümbruses $U(a)$ saame, et $f(x)+\dfrac{1}{|f(x)|} = f(x)-\dfrac{1}{f(x)} = \left(1-\dfrac{1}{f(x)}\right)(f(x)+1)\geqslant f(x)+1$. Niisiis, $x\in U(a)$ puhul

$$|f(x)+1|\leqslant\left|f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right|.$$

Eelduse põhjal leidub iga arvu $\varepsilon > 0$ puhul punkti $a$ niisugune punkteeritud ümbrus $U(a)$, et $x \in U(a)$ puhul $\left| f(x) + \dfrac{1}{|f(x)|} \right| < \varepsilon$. Seda enam siis $x \in U(a)$ puhul kehtib võrratus $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$. Niisiis, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -1$.

47. Vastavalt tuletise definitsioonile $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = f'(x_0)$. Igale etteantud arvule $\varepsilon > 0$ vastab punkti $x_0$ niisugune punkteeritud ümbrus $U(x_0)$, et $x \in U(x_0)$ puhul kehtib võrratus

$$\left| \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

ehk

$$\left| f(x_0 + x) - f(x_0) - x f'(x_0) \right| < \varepsilon \, |x| \, .$$

Olgu ümbruse $U(x_0)$ raadius $\delta$. Võtame $N$ nii, et $\dfrac{1}{N} < \delta$. Siis $n \geqslant N$ puhul kehtib võrratus $\dfrac{1}{n} \leqslant 1N < \delta$ ning $k \leqslant n$ puhul $\dfrac{k}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n} < \delta$.

Seepärast

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f\left( x_0 + \frac{i}{n^2} \right) - n f(x_0) - \sum_{i=1}^{n} f'(x_0) \cdot \frac{i}{n^2} \quad &\leqslant \quad \sum_{i=1}^{n} \left| f\left( x_0 + \frac{i}{n^2} \right) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot i n^2 \right| < \\ &< \quad \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{\varepsilon}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2} = \varepsilon \cdot \frac{n+1}{2n} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Samal ajal

$$\sum_{i=1}^{n} f'(x_0) \frac{i}{n^2} = f'(x_0) \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = f'(x_0) \cdot \frac{n+1}{2n},$$

st. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f'(x_0) \dfrac{i}{n^2} = \dfrac{1}{2} f'(x_0)$.

Ülaltoodust selgub nüüd, et

$$\lim_{n \to \infty} \left( \sum_{i=1}^{n} f\left( x_0 + \frac{i}{n^2} \right) - n f(x_0) \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f'(x_0) \frac{i}{n^2} = \frac{1}{2} f'(x_0).$$

48. Kõigepealt leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^p nx}{x^2} := A$, kus $p \in \mathbb{Q}$. Tähistame $p := \dfrac{r}{s}$, kus $r$ ja $s$ on ühistegurita täisarvud.

Saame

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[s]{\cos^r nx}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^r nx}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[s]{\cos^q nx}+\ldots+\sqrt[s]{\cos^{(s-1)q} nx}} = \\ &= \frac{1}{s}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^r nx}{x^2} = \frac{1}{s}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{x^2}\cdot\left(1+\cos nx+\ldots+\cos^{r-1} nx\right) = \\ &= \frac{r}{s}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{x^2} = p\cdot\frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

Ilmselt

$$1-\prod_{k=1}^{n}\cos^{a_k} kx = \sum_{k=1}^{n}\cos^{a_1} x\cos^{a_2} x\cdot\ldots\cdot(\cos^{a_{k-1}}(k-1)x)\,(1-\cos^{a_k} kx)\,.$$

Seega

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1-\prod_{k=1}^{n}\cos^{a_k} kx}{x^2} &= \sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\left(\cos^{a_1} x\cos^{a_2} 2x\cdot\ldots\cdot(\cos^{a_{k-1}}(k-1)x)\cdot\frac{1-\cos^{a_k} kx}{x^2}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{a_k} kx}{x^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2 a_k}{2}. \end{aligned}$$

49. Olgu $x=\frac{p}{q}$ ratsionaalarv. Siis

$$m!x = m!\cdot\frac{p}{q} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(q-1)(q+1)\cdot\ldots\cdot mp$$

on paarisarv, mistõttu $\cos(\pi m!x)=1$ ja $D(x)=1$.

Kui $x$ on irratsionaalarv, siis $m!x$ ei ole täisarv ühegi $m$ väärtuse korral. Siis $|\cos(\pi m!x)|<1$, mistõttu

$$\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)=0.$$

50. On selge, et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$. Sellest järeldub, et igale arvule $\varepsilon>0$ vastab $\delta>0$ nii, et $0<|x|<\delta$ puhul kehtib võrratus $\left|\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Loomulikult, iga $n \in \mathbb{N}$ korral, kui $0 < |x| < \delta$, siis

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right| &= \left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right| + \left|\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}\left|\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{2}}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{f\left(\frac{x}{4}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2}}\right| < \ldots < \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{8}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

51. Kui $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, siis $\sin x < x < \tan x$;

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right) > 2\cdot\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = x-\frac{x^3}{4}.$$

52. Ilmselt $P(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)$ ja

$$P'(x) = (x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+\ldots+(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}).$$

Seega

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}.$$

Siit

$$P''(x) = P'(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}+P(x)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\right)' = P(x)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\right)^2+P(x)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\right)'.$$

Pärast teisendusi saame

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-x_i)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\frac{1}{(x-x_i)\left(x-x_j\right)}.$$

Korrutades viimast võrdust liikmeti teguriga $x-x_k$, kus $k=\overline{1,n}$, saame:

$$\frac{P''(x)}{P(x)}(x-x_k) = 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\frac{x-x_k}{(x-x_i)\left(x-x_j\right)}$$

ehk

$$\frac{P''(x)}{P(x)}(x-x_k)=2\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{x-x_i}+\sum_{\substack{i,j\neq k\\ i<j}}^{n}\frac{x-x_k}{(x-x_i)\left(x-x_j\right)}+2\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{x-x_j}.$$

Kui see võrdus esitada kujul

$$\frac{P''(x)}{P'(x)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}(x-x_k)=2\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{x-x_i}+\sum_{\substack{i,j\neq k\\ i<j}}^{n}\frac{x-x_k}{(x-x_i)\left(x-x_j\right)}+2\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{x-x_j}$$

ning võtta $x=x_k$, siis

$$\frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}=2\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{x_k-x_i}+2\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{x_k-x_j}.$$

Kui $k=1,2,\ldots,n$, siis

$$\begin{aligned}
\frac{P''(x_1)}{P'(x_1)} &= 2\cdot\left(0+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_1-x_n}\right),\\
\frac{P''(x_2)}{P'(x_2)} &= 2\cdot\left(\frac{1}{x_2-x_1}+0+\frac{1}{x_2-x_3}+\ldots+\frac{1}{x_2-x_n}\right),\\
&\ldots\\
\frac{P''(x_n)}{P'(x_n)} &= 2\cdot\left(\frac{1}{x_n-x_1}+\frac{1}{x_n-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}+0\right).
\end{aligned}$$

Liites saadud võrdused liikmeti, saame:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}=0.$$

53. Olgu $\{x_n\}$ mingi lõpmatu jada, $x_n>a>0$. Siis leidub $N$ nii, et $n>N$ puhul kehtib võrratus

$$\left|f'(x_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.3}$$

kus $\varepsilon>0$ on suvaline etteantud arv.

Fikseerime mingi $n_0>N$ ning võttes $n>n_0$, kasutame lõigul $[x_{n_0},x_n]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi:

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_{n_0}}\right|=\left|f'(c_n)\right|,\qquad c_n\in(x_{n_0},x_n). \tag{6.4}$$

Kasutades võrratust (6.3), saame:

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_{n_0}}\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.5}$$

Võrratuse (6.5) esitame kujul

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n}\right|<\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}$$

ehk

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}-\frac{f(x_{n_0})}{x_n}\right|<\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Et

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}-\frac{f(x_{n_0})}{x_n}\right|>\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|-\left|\frac{f(x_{n_0})}{x_n}\right|,$$

siis seda enam kehtib võrratus

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|-\left|\frac{f(x_{n_0})}{x_n}\right|<\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}$$

ehk

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|<\left|\frac{f(x_{n_0})}{x_n}\right|+\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Küllalt suurte $n$ väärtuste korral kehtib ilmselt võrratus

$$\left|\frac{f(x_{n_0})}{x_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Samal ajal $n>n_0$ puhul on

$$\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis $n_0>N$ ja küllalt suurte $n>n_0$ puhul kehtib võrratus

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Et $\{x_n\}$ on suvaline lõpmatu jada, mille kõik liikmed on positiivsed arvud, siis tulemusest nähtubki, et

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

108. Võrduse mõlema poole diferentseerimisel saame:

$$f(x) = f(x) + xf'(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = C > 0.$$

109. Tähistame

$$a_n := \sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^n}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}.$$

Siis

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right).$$

Selle võrduse parem pool kujutab funktsiooni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ Riemanni summat. Seega

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx = x\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \\ &= \ln 2 - 2 + 2\arctan x\Big|_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Seega

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}.$$

110. Et iga $x \in [0,1]$ korral kehtib võrratus

$$x^2 + x + 1 \leqslant 1 + 1 + 1 = 3,$$

siis

$$\int_0^1 \left(x^2+x+1\right)^n dx \leqslant 3^n \int_0^1 dx \leqslant 3^n.$$

Kuid

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &\geqslant 3\sqrt[3]{x^2x} = 3x; \\ \int_0^1 \left(x^2+x+1\right)^n dx &\geqslant \int_0^1 3^n x^n\,dx = 3^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{3^n}{n+1}.\end{aligned}$$

111. Defineerime funktsiooni

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}$$

seosega:

$$g(x) = (x-a)\,(x-b)\int_a^x f(t)\,dt.$$

Et $g(x)$ on diferentseeruv lõigul $[a,b]$ (*miks?*) ja $g(a) = g(b)$, siis Rolle'i teoreemi põhjal leidub punkt $c \in (a,b)$ nii, et $g'(c) = 0$. Leiame $g'(x)$:

$$g'(x) = (2x-a-b)\int_a^x f(t)\,dt + (x-a)\,(x-b)\,f(x).$$

Võttes $x = c$ ning võrdsustades tuletise $g'(c)$ nulliga, saame kohe:

$$(2c-a-b)\int_a^c f(t)\,dt + (c-a)\,(c-b)\,f(c) = 0$$

ehk

$$\int_a^c f(t)\,dt = \frac{(c-a)\,(c-b)\,f(c)}{a+b-2c}.$$

112. Funktsiooni $f$ diferentseeruvusest järeldub selle funktsiooni pidevus lõigul $[a,b]$. Kasutades integraalarvutuse keskväärtusteoreemi, saame

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)\,(b-a)\,.$$

Funktsiooni $f$ sürjektiivuse tõttu leiduvad $x_3, x_4 \in [a,b]$ nii, et $a = f(x_4)$ ja $b = f(x_3)$. Seega

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)\,(f(x_3) - f(x_4))\,.$$

Lõigul $[x_3, x_4]$ kehtib Lagrange'i keskväärtusteoreem. Seepärast

$$f(x_3) - f(x_4) = f'(x_2)\,(x_3 - x_4)\,,$$

kus $x_2 \in (x_3, x_4)$.

Pärast asendamist eelmisse valmisse saamegi tõestatava võrduse.

113. Olgu $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [0,1]$. Siis

$$\begin{aligned}\left|e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt\right| &= \left|f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 (f(x)-f(t))\,dt\right| \leqslant \\ &\leqslant \int_0^1 |f(x)-f(t)|\,dt = \int_0^1 \left|f'(c)\right| |x-t|\,dt,\end{aligned}$$

kus $x < c < t$ või $t < c < x$, sõltuvalt sellest, kumb on suurem, kas $t$ või $x$. Tähistame $M := \max\limits_{x\in[0,1]} \left|f'(x)\right|$. Siis

$$\left|e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt\right| \leqslant M,$$

sest $|x-t| \leqslant 1$. Leiame tuletised $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ja $f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$.

Et leida $M$, võrdsustame $f''(x) = 0$, millest $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Kui $x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, siis $f''(x) < 0$; kui $x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, siis $f''(x) > 0$. Seega punktis $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ on funktsioonil $f'(x)$ maksimaalne väärtus $M = \sqrt{\dfrac{2}{e}}$.

143. Ilmselt

$$y_1' + Py_1 \equiv Q; \tag{6.6}$$

$$y_2' + Py_2 \equiv Q. \tag{6.7}$$

Korrutame samasust (6.6) liikmeti $y_2$-ga, samasust (6.7) aga $(-y_1)$-ga ning liidame saadud samasused:

$$y_2y_1' - y_1y_2' = Q(y_2 - y_1).$$

Olgu $y_2 := y_1z$. Siis

$$zy_1' - \left(zy_1' + y_1z'\right) = -Q\,(1-z)$$

ehk

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{Q}{y_1}\,dx,$$

millest

$$z = 1 + a\exp\left(-\int \frac{Q}{y_1}\,dx\right).$$

144. Ilmselt $y(0) = 1$.

$$y'(x) = -\lambda \int_0^x y(t)\,dt,$$

millest

$$y'(0) = 0.$$

Nüüd leiame

$$y''(x) = -\lambda y(x),$$

millest, arvestades tingimusi $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, saame kohe

$$y = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad \text{kui } \lambda \geqslant 0$$

ja

$$y = \cos\sqrt{-\lambda}x, \quad \text{kui } \lambda < 0.$$

145. Diferentseerime esimest integraali $x$ järgi:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\varphi,$$

seega

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\varphi = f.$$

Viimast võrdust diferentseerime $c$ järgi:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial c} + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial c}\varphi = 0$$

ehk

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) = 0.$$

Seega avaldis

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial c}\varphi\,dx$$

on täisdiferentsiaal, kust omakorda järgneb seos

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial c}(dy - \varphi\,dx) = A, \qquad A = \text{const.}$$