Matemaatikaolümpiaad 2002
Lahendused

1. Olgu $f(x)$ funktsioon pideva kolmanda tuletisega. Tõestada, et eksisteerib arv $a \in \mathbb{R}$ selline, et

$$f(a) \cdot f'(a) \cdot f''(a) \cdot f'''(a) \geq 0.$$

Lahendus. Kui vähemalt üks arvudest $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, või $f'''(a)$ võrdub nullile mingi punkti a jaoks, siis väide ilmselt kehtib. Seega saame eeldada, et iga funktsioonidest $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ja $f'''(x)$ on rangelt positiivne või rangelt negatiivne kogu reaalteljel. Asendades $f(x)$ vajadusel $-f(x)$-ga, saame eeldada, et $f''(x) > 0$; asendades $f(x)$ vajadusel $f(-x)$-ga, saame eeldada, et $f'''(x) > 0$. (Märkime, et need teisendused ei muuda avaldise $f(x)f'(x)f''(x)f'''(x)$ märki.) Võrratusest $f''(x) > 0$ järeldub, et $f'(x)$ on kasvav, ning võrratusest $f'''(x) > 0$ järeldub, et $f'(x)$ on nõgus, seega $f'(x+a) > f'(x) + af''(x)$ iga x ja a jaoks. Suurendades a viimases võrratuses, näeme, et $f'(x+a)$ on positiivne piisavalt suure a jaoks; seega $f'(x) > 0$ iga x jaoks. Analoogiliselt võrratustest $f'(x) > 0$ ja $f''(x) > 0$ järeldub, et $f(x) > 0$ iga x jaoks. Kust me saame, et $f(x)f'(x)f''(x)f'''(x) > 0$ iga x jaoks.

2. Vaatleme funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1-2x-x^2}$ astmereaks arendamist

$$\frac{1}{1-2x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Tõestada, et iga täisarvu $n \geq 0$ eksisteerib naturaalarv m selline et

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_m.$$

Lahendus. Märgime, et

$$\frac{1}{1-2x-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{1-(1+\sqrt{2})x} + \frac{\sqrt{2}-1}{1-(1-\sqrt{2})x} \right)$$

ja

$$\frac{1}{1+(1\pm\sqrt{2})x} = \sum_{n=0}^{\infty} (1\pm\sqrt{2})^n x^n,$$

seega

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((\sqrt{2}+1)^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}\right).$$

Lihtne arvutamine annab $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+2}$.

3. Milliste positiivsete arvude paaride (a, b) jaoks päratu integraal

$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right) dx$$

koondub?

Lahendus. Integraal kooondub siis ja ainul siis, kui $a = b$. Tõestuseks me kasutame fakti, et $(1+x)^{1/2} = 1 + x/2 + O(x^2)$ for $|x| < 1$.

Seega

$$\begin{aligned}\sqrt{x+a}-\sqrt{x} &= x^{1/2}(\sqrt{1+a/x}-1)\\ &= x^{1/2}(1+a/2x+O(x^{-2})),\end{aligned}$$

kust

$$\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} = x^{1/4}(1+a/4x+O(x^{-2}))$$

ja analoogiliselt

$$\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}} = x^{1/4}(1+b/4x+O(x^{-2})).$$

Seega integraal teisendub kujuks

$$\int_b^\infty x^{1/4}((a-b)/4x+O(x^{-2}))\,dx.$$

Avaldis $x^{1/4}O(x^{-2})$ on tõkestatud konstandiga korda $x^{-7/4}$, mille integraal koondub. Seega esialgne integraal koondub parajasti siis, kui koondub funktsiooni $x^{-3/4}(a-b)/4$ integraal. Kuna funktsiooni $x^{-3/4}$ integraal hajub, esialgne in$a = b$ (in which case the integral telescopes anyway).

4. Jadas (a_n)

$$a_1 = A; \quad a_2 = B \quad (0 < B < A); \quad \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Tõestada, et jada (a_n) koondub ja leida selle piirväärtus.

Lahendus. Et

$$\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}},$$

siis on tegemist aritemetilise jadaga, mille esimeseks liikmeks on $\frac{1}{A}$ ja vaheks $\frac{1}{B} - \frac{1}{A}$. Seega

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{A} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)(n-1),$$

millest

$$a_n = \frac{AB}{B + (A-B)(n-1)}.$$

Seega $\lim_n a_n = 0$.

5. Olgu S lõplik naturaalarvude hulk, iga neist suurem ühest. Oletame, et iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}$ jaoks leidub mingi $s \in S$ selline, et $\text{SÜT}(s,n) = 1$ või $\text{SÜT}(s,n) = s$. Näidata, et eksisteerivad $s, t \in S$ sellised, et $\text{SÜT}(s,t)$ on algarv.

Lahendus. Valime algarvude jada $p_1, p_2, \ldots$ järgenvalt. Olgu p_1 mingi algarv, mis jagab hulga S mingi elemendi. Kui $p_1, \ldots, p_j$ on juba valitud, proovime leida elementi $N_j \in S$ nii, et $\text{SÜT}(N_j, p_1 \cdot \ldots \cdot p_j) = 1$. Kui nissugust N_j pole, siis jada $p_1, p_2, \ldots$ konstrueerimine lõpeb. Kui selline N_j leidub, siis võtame p_{j+1} rolliks arvu N_j mingi algarvulist jagajat.

Kuna S on lõplik, siis algoritmi tulemusena saame lõpliku jada $p_1, \ldots, p_k$. Olgu m vähim naturaalarv selline, et arvul $p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$ on olemas jagaja hulgas S. (Eelduse kohaselt arvud $n = p_1 \cdots p_k$, $m = k$ rahuldavad seda omadust, seega m on korrektselt defineeritud.) Kui $m = 1$, siis $p_1 \in S$, ja väide ilmselt kehtib, seega eeldame, et $m \geq 2$. Arvu $p_1 \cdots p_m$ iga jagaja $d \in S$ peab olema arvu p_m kordsena, vastasel juhul d on ka arvu $p_1 \cdots p_{m-1}$ jagaja, mis on vastuolus arvu m valikuga. Nüüd aga $\text{SÜT}(d, N_{m-1}) = p_m$, MOTT.

6. Olgu G rühm ühikuga e ja olgu $\phi : G \to G$ funktsioon selline, et

$$\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3) = \phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3)$$

igakord kui $g_1 g_2 g_3 = e = h_1 h_2 h_3$. Tõestada, et leidub element $a \in G$ selline, et $\psi(x) = a\phi(x)$ oh homomorfism (s.t. $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ iga $x, y \in G$ jaoks).

Lahendus. Võtame $a := \phi(e)^{-1}$. Märgime kõigepealt, et

$$\phi(g)\phi(e)\phi(g^{-1}) = \phi(e)\phi(g)\phi(g^{-1}),$$

seega $\phi(g)$ kommuteerib elemendiga $\phi(e)$ iga g korral. Edasi, me märgime, et

$$\phi(x)\phi(y)\phi(y^{-1}x^{-1}) = \phi(e)\phi(xy)\phi(y^{-1}x^{-1})$$

ning kasutades elementi $\phi(e)$ kommutatiivsust, me saame

$$\phi(e)^{-1}\phi(x)\phi(e)^{-1}\phi(y) = \phi(e)^{-1}\phi(xy),$$

või teisi sõnu $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, MOTT.