Matemaatikaolümpiaad 2001
Lahendused

1. Leida kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon f, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$1)\ f(0) = f'(0) = 1; \quad 2)\ f''(x) \geq 0,\ x \in (0,1); \quad 3)\ \int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}.$$

Lahendus. Kuna funktsioon f on 2 korda pidevalt diferentseeruv, siis Maclaurini valemi kohaselt kehtib iga $x \in [0,1]$ korral võrdus

$$f(x) = 1 + x + \frac{f''(\theta_x x)}{2}x^2, \text{ kus } \theta_x \in (0,1).$$

Integreerides selle võrduse mõlemaid pooli, saame, et

$$\frac{3}{2} = \int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2} + \int_0^1 \frac{f''(\theta_x x)}{2}x^2 dx.$$

Seega $\int_0^1 \frac{f''(\theta_x x)}{2}x^2 dx = 0$. Kuna $f''(x) \geq 0$, $x \in (0,1)$, ning funktsioon

$$y = \frac{f''(\theta_x x)}{2}x^2 = f(x) - 1 - x$$

on pidev, siis $f''(\theta_x x) = 0$ iga $x \in [0,1]$ korral. Seega $f(x) = 1 + x$.

2. Olgu reaalarvud $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sellised, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k > 0.$$

Defineerime funktsiooni

$$f(t) = \frac{1}{(1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)\ldots(1-\lambda_n t)}.$$

Tõestada, et $f^{(k)}(0) > 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Lahendus. Kõigepealt näitame, et kui mingi funktsioon g rahuldab tingimust $g^{(k)}(0) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, siis ka $(e^{g(x)})^{(k)}(0) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Selleks kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit. Kõigepealt paneme tähele, et $(e^{g(x)})' = e^{g(x)}g'(x)$, millest $(e^{g(x)})'(0) > 0$. Nüüd eeldame, et mingi $i \in \mathbb{N}$

korral kehtivad võrratused $(e^{g(x)})^{(k)}(0) > 0$, $k \in \{1, \ldots, i\}$. Veendume, et siis ka $(e^{g(x)})^{(i+1)}(0) > 0$. Tõepoolest, kuna

$$(e^{g(x)})^{(i+1)} = (e^{g(x)} g'(x))^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (e^{g(x)})^{(k)} g^{(i-k)}(x),$$

siis induktsiooni eelduse põhjal

$$(e^{g(x)})^{(i+1)}(0) = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (e^{g(x)})^{(k)}(0) g^{(i-k)}(0) > 0.$$

Vaatleme nüüd funktsiooni

$$g(x) = \ln f(x) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - \lambda_i x).$$

Kuna

$$g^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(k-1)!\, \lambda_i^k}{(1 - \lambda_i x)^k},$$

siis $g^{(k)}(0) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Lahenduse esimese osa põhjal saame, et $f^{(k)}(0) > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Olgu (a_n) tõkestatud jada, mis rahuldab tingimust

$$a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Tõestada, et see jada koondub.

Lahendus. Jada (a_n) koonduvuseks piisab näidata, et ta on Cauchy jada. Oletame vastuväiteliselt, et (a_n) ei ole Cauchy jada. Siis leiduvad reaalarv $\varepsilon > 0$ ja jada (a_n) osajada (a_{n_k}) selliselt, et

$$a_{n_{2i}} - a_{n_{2i-1}} > \varepsilon, \ i \in \mathbb{N}.$$

Tingimusest (1) järeldub, et mistahes $n, p \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned} a_{n+p} - a_n &= (a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) \\ &\geq -\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^k} \geq -\frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
a_{n_{2i}} &> \varepsilon + a_{n_{2i-1}} \geq \varepsilon - \sum_{k=n_{2(i-1)}}^{n_{2i-1}-1} \frac{1}{2^k} + a_{n_{2(i-1)}} \\
&> 2\varepsilon - \sum_{k=n_{2(i-1)}}^{n_{2i-1}-1} \frac{1}{2^k} + a_{n_{2(i-1)-1}} \geq \ldots \geq (i-1)\varepsilon - \sum_{k=n_1}^{n_{2i-1}-1} \frac{1}{2^k} + a_{n_1},
\end{aligned}$$

millest järeldub, et jada $(a_{n_{2i}})$ on tõkestamata, mis on vastuolus eeldusega.

4. Olgu f lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon. Tõestada, et

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\int_a^b f^{2n}(x)dx} = \max_{[a,b]} |f|.$$

Lahendus. Kui $\max|f| = 0$, siis on väide ilmne. Olgu $d = \max|f| > 0$. Vastavalt mistahes arvule $c \in (0,d)$ leidub vahemik (a',b') selliselt, et $|f(x)| \geq c$ iga $x \in (a',b')$ korral. Seega

$$\sqrt[2n]{\int_a^b \left(\frac{f(x)}{c}\right)^{2n} dx} \geq \sqrt[2n]{\int_{a'}^{b'} \left(\frac{f(x)}{c}\right)^{2n} dx} \geq \sqrt[2n]{(b'-a')} \to 1,$$

millest järeldub, et

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\int_a^b f^{2n}(x)dx} \geq c.$$

Teiselt poolt,

$$\begin{aligned}
\sqrt[2n]{\int_a^b f^{2n}(x)dx} &\leq \sqrt[2n]{(b-a)\max_{x\in[a,b]} |f(x)|^{2n}} \\
&= \max_{[a,b]} |f(x)| \sqrt[2n]{b-a} \to \max_{[a,b]} |f(x)|,
\end{aligned}$$

mis annabki meile soovitud tulemuse.

5. Olgu $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ on selline maatriks, et $a_{ii} = 1$ ja $a_{ij} = 0$, kui $i > j$, $i = 1,\ldots,n$. Tõestage, et maatriks A^{-1} omab sama kuju s.t. $A^{-1} = (b_{ij})$, kus $b_{ii} = 1$ ja $b_{ij} = 0$, kui $i > j$, $i = 1,\ldots,n$.

Lahendus. Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1n} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & a_{1n-1} - a_{12}a_{2n-1} & a_{1n} - a_{12}a_{2n} & 1 & -a_{12} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1n} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\dots$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & b_{12} & \dots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

6. Olgu K korpus, $\mathrm{char}(K) = 0$, ning olgu $f \in K[x]$. Tõestada, et tuletis f' jagab polünoomi f siis ja ainult siis, kui f esitub kujul

$$f(x) = a_0(x - x_0)^n.$$

(Kui korpuse K mingi lihtne alamkorpus on isomorfne ratsionaalarvude korpusega $\mathbb{Q}$, siis öeldakse, et korpuse K karakteristika on 0. Korpuse K karakteristikat tähistatakse: $\mathrm{char}(K)$.)

Lahendus. Piisavus on ilmne, tõestame tarvilikkus. Selleks kasutame järgmist Teoreem.

Teoreem Olgu K korpus ja $\mathrm{char}(K) = 0$. Kui taandumatu polünoom $p \in K[x]$ on polünoomi $f \in K[x]$ k-kordne tegur, siis on p tuletise f' $(k-1)$-kordne tegur. (Mati Kilp, Algebra I)

Olgu

$$f = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m},$$

kus p_i, $i = 1, \dots, m$, on taandumatud ja paarikaupa ühisteguriteta polünoomid. Teoreemist järeldub, et

$$\text{SÜT}(f, f') = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \dots p_m^{k_m-1}.$$

Seega aga

$$\frac{f}{\text{SÜT}(f, f')} = p_1 p_2 \dots p_m.$$

Nüüd eeldame, et f' jagab polünoomi f, s.t.

$$f(x) = f'(x) a_0 (x - x_0).$$

Siis $\text{SÜT}(f, f') = f'$. Järelikult

$$\frac{f}{\text{SÜT}(f, f')} = a_0 (x - x_0).$$

ning seega $f(x) = a(x - x_0)^n$.