Lahendused

1. Olgu funktsioon f määratud kogu reaalteljel, kusjuures suvaliste $x \in \mathbb{R}$ ja $h > 0$ korral

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2. \tag{1}$$

Tõestada, et $f(x) \equiv \text{const}$. **10 punkti.**

Lahendus. Fikseerime suvalise $y \in \mathbb{R}$ ja vaatleme piirväärtust

$$\lim_{g \to 0} \frac{f(y+g) - f(y)}{g} = \lim_{g \to 0} \frac{f\big((y + \frac{1}{2}g) + \frac{1}{2}g\big) - f\big((y + \frac{1}{2}g) - \frac{1}{2}g\big)}{g}. \tag{2}$$

Võttes seoses (1) $x = y + \frac{1}{2}g$ ja $h = \frac{g}{2}$, saame, et

$$-\frac{g}{4} \le \frac{f(y+g) - f(y)}{g} \le \frac{g}{4},$$

järelikult piirväärtus (2) eksisteerib ja on võrdne nulliga. Seega

$$f'(y) = \lim_{g \to 0} \frac{f(y+g) - f(y)}{g} = 0$$

iga $y \in \mathbb{R}$ korral, järelikult $f(x) \equiv$const.

2. Tõestada võrratus

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{5}{4} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

12 punkti.

Lahendus. Piisab näidata, et rea $\sum_k \frac{1}{k^3}$ summa on väiksem või võrdne arvuga 5/4. Rea koonduvuse integraaltunnuse põhjal

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2n^2}.$$

Seega

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} + \sum_{k=3}^{\infty} \le \frac{9}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{4}.$$

3. Olgu funktsioon f kogu reaalteljel kaks korda pidevalt diferentseeruv. Tõestada, et suvalise $x \in \mathbb{R}$ korral

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

13 punkti.

Lahendus. Taylori teoreemi põhjal

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(z)}{2}h^2 \quad \Big(z \in (x, x+h)\Big)$$

ja

$$f(x-h) - f(x) = -f'(x)h + \frac{f''(w)}{2}h^2 \quad \Big(w \in (x-h, x)\Big).$$

Liites nende võrduste vastavalt pooled ning jagades seejärel saadud võrduse mõlemad pooled läbi arvuga h^2, järeldub piirprotsessis $h \to 0$ vajalik tulemus.

4. Olgu maatriksil S järgmine omadus: suvaline maatriks A on ühesel viisil esitatav summana $A = A_1 + A_2$, kus maatriksid A_1 ja A_2 rahuldavad vastavalt tingimusi $A_1S = SA_1$ ja $A_2S = -SA_2$.

Tõestada, et selleks on tarvilik ja piisav, et S^2 oleks ühikmaatriksi kordne. (Kõik vaadeldavad maatriksid on n-järku ruutmaaatriksid.) **15 punkti.**

Lahendus. Olgu $S^2 = \lambda E$, kus E on ühikmaatriks ja $\lambda \in \mathbb{R}$ on mingi arv. Olgu A mingi maatriks. Selgitame, millega peavad võrduma maatriksid A_1 ja A_2 selleks, et maatriks A oleks esitatav kujul $A = A_1 + A_2$, kusjuures kehtiksid võrdused $A_1S = SA_1$ ja $A_2S = -SA_2$. Korrutame maatriksit A maatriksiga S paremalt ja vasakult:

$$AS = A_1S + A_2S = SA_1 - SA_2, \quad SA = SA_1 + SA_2.$$

Siit

$$A_1 = \frac{1}{\lambda}SSA_1 = \frac{1}{2\lambda}(SAS + SSA) = \frac{1}{2\lambda}(SAS + \lambda A),$$
$$A_2 = A - A_11 = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2\lambda}SAS,$$

millest $A = A_1 + A_2$.

Olgu iga maatriks A on esitatav summana $A = A_1 + A_2$ selliselt, et $A_1 S = S A_1$ ja $A_2 S = -S A_2$. Selgitame, millega võrduvad maatriksi S^2 koordinaatid ξ_{kl} $(k, l = 1, \ldots, n)$. Korrutades maatriksit A paremalt maatriksiga S^2, saame

$$AS^2 = A_1 S^2 + A_2 S^2 = S A_1 S - S A_2 S = S^2 A_1 + S^2 A_2 = S^2 A.$$

Võttes viimases võrduses $A = A^{kl} = (a_{ij}^{kl})$ $(k, l = 1, \ldots, n)$, kus $a_{ij}^{kl} = 1$, kui $i = k$, $j = l$ ja $a_{ij}^{kl} = 0$ vastasel juhul, saame, et $\xi_{ij} = 0$, kui $i \neq j$ ja $\xi_{11} = \ldots = \xi_{nn}$, s.t., S^2 on ühikmaatriksi kordne.

5. Olgu E 3-mõõtmeline vektorruum üle korpuse $\mathbb{Q}$ ning olgu elemendid $x, y, z \in E$, $x \neq 0$, sellised, et mingi lineaarse kujutuse $T: E \to E$ korral $Tx = y$, $Ty = z$ ja $Tz = x + y$. Tõestada, et elemendid x, y ja z on lineaarselt sõltumatud. **15 punkti.**

Lahendus. Oletame vastuväiteliselt, et elemendid x, y ja z on lineaarselt sõltuvad. Siis $ax + by + cz = 0$ mingite $a, b, c \in \mathbb{Q}$ korral. Eeldame kõigepealt, et $a \neq 0$. Tähistame $b_1 = -b/a$ ja $c_1 = -c/a$; siis

$$Tx = y = T(b_1 y + c_1 z) = b_1 z + c_1 x + c_1 y = b_1 z + c_1(b_1 y + c_1 z) + c_1 y,$$

millest $\alpha_1 y = \beta_1 z$, kus kordajad $\alpha_1 = c_1 b_1 + c_1 - 1$ ja $\beta_1 = -(b_1 + c_1^2)$ erinevad nullist. (Tõepooloest, kui $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$, siis $z = 0$, millest

$$0 = Tz = x + y, \quad -x = y = Tx = T(-y) = -z = 0,$$

mis on vastuolus eeldusega $x \neq 0$. Analoogiliselt saame vastuolu, kui eeldada, et $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$. Kui aga $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, siis $b_1 = -c_1^2$ ja $c_1^3 + c_1 - 1 = 0$. Näitame, et viimasel võrrandil puuduvad ratsionaalarvulised lahendid. Selle võrrandi ainus reaalne lahend kuulub vahemikku $(0, 1)$. Kui see lahend oleks reaalne, siis esituks ta taandumatu murruna m/n, kus $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m < n$. Võrdusest $\left(\dfrac{m}{n}\right)^3 + \dfrac{m}{n} = 1$

järeldub, et $\dfrac{m^2}{n^2} = \dfrac{n-m}{m}$. Kuna murd $\dfrac{m}{n}$ on taandumatu, siis on ka murd $\dfrac{n-m}{m}$ taandumatu, järelikult $m = n^2$, mis on vastuolus murru $\dfrac{m}{n}$ taandumatusega.)

Seega $y = \alpha z$, kus $\alpha = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ja

$$\frac{1}{\alpha} y = z = \alpha(x+y),$$

millest

$$x = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} y,$$

ja

$$\alpha z = y = Tx = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} Ty = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} z.$$

Siit järeldub, et $\alpha^3 + \alpha^2 - 1 = 0$. Nagu eespool, saab näidata, et viimasel võrrandil puuduvad ratsionaalarvulised lahendid, mis on vastuolus eeldusega.

Eeldame, et $a = 0$. Siis $by = -cz$, kusjuures kordajad b ja c erinevad nullist. (Tõepoolest, kui eeldada, et $b = 0$, aga $c \neq 0$, siis $z = 0$, millest $0 = Tz = x + y$, $-x = y = Tx = T(-y) = -z = 0$, mis on vastuolus eeldusega $x \neq 0$. Analoogiliselt saame vastuolu eeldades, et $b \neq 0$, $c = 0$. Juhul $b = c = 0$ saame, et x, y ja z on lineaarselt sõltumatud.) Seega $y = \alpha z$, kus $\alpha \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, mis, nagu juhul $a \neq 0$, viib vastuolule.

6. Leida järgmised piirväärtused.

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$. **15 punkti.**

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot e^n}$. **10 punkti.**

Lahendus.

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n}}{\frac{k^2}{(2n)^2} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2n}.$$

Määratud integraali definitsiooni kohaselt on viimane piirväärtus võrdne integraaliga $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+\frac{1}{4}} dx$.

2) Kõigepealt märgime, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot e^n} = \exp\bigl(\lim_{n\to\infty}(n^2\ln(n+1) - n^2\ln n - n)\bigr).$$

Kuna

$$\lim_{n\to\infty}(n^2\ln(n+1) - n^2\ln n - n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{2}{n^3}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2(n+1)}}{-\frac{2}{n^3}} = -1/2,$$

siis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot e^n} = e^{-1/2}.$$