Решения.

1. Так как

$$|a_n| = \frac{|na_n|}{n} \le \frac{1}{2}\Big(n^2a_n^2 + \frac{1}{n^2}\Big),$$

то сходимость ряда $\sum\limits_k |a_k|$ слеудет из сходимости рядов $\sum\limits_n n^2a_n^2$ и $\sum\limits_n \frac{1}{n^2}$.

2. Так как подинтегральные функции в обеих частях равенства $\int_1^{f(x)} e^{u^2}du = \int_0^x \frac{udu}{f(u)}$ непрерывны и f дифференцируема, то мы можем продифференцировать это равенство. Имеем

$$f'(x)e^{f^2(x)} = \frac{x}{f(x)} \iff e^{f^2(x)}f(x)f'(x) = \frac{\big(e^{f^2(x)}\big)'}{2} = x \iff e^{f^2(x)} = x^2 + C.$$

Следоватеьно $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+C)}$. Определим константу C. Сперва заметим, что $C > 0$. Далее, так функция $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+C)}$ принимает минимальное значение при $x = 0$, то $f(0) = \sqrt{\ln(C)} = 1$. Следовательно $C = e$ и $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+e)}$.

3. Рассмотрим функцию $f(x) := \Big(x + \frac{1}{x}\Big)^a$ и вычислим её вторую производную:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\Big(\frac{x^2+1}{x}\Big)^a a(ax^4 - 2ax^2 + a + 4x^2 + 1 - x^4)}{x^2(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\Big(\frac{x^2+1}{x}\Big)^a a\big(a(x^2-1)^2 + (2+\sqrt{5}-x^2)(x^2-2+\sqrt{5})\big)}{x^2(x^2+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

при $x \in (0,1)$. Следовательно f выпукла вниз при $x \in (0,1)$, поэтому для любых $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset (0,1)$ имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \Big(x_k + \frac{1}{x_k}\Big)^a \ge f\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\Big) = \Big((\sum_{k=1}^n x_k)/n + \frac{n}{\sum_{k=1}^n x_k}\Big)^a.$$

Так как по условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \Big(x_k + \frac{1}{x_k}\Big)^a \ge \Big(\frac{1}{n} + n\Big)^a,$$

откуда и следует требуемое неравенство.

4. Заметим, что

$$a_n = \sum_{\substack{k=0\\ 2|k}}^{n} C_n^k (\sqrt{3})^k, \quad \sqrt{3} b_n = \sum_{\substack{k=0\\ 2\nmid k}}^{n} C_n^k (\sqrt{3})^k.$$

С другой стороны $(1-\sqrt{3})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (\sqrt{3})^k = a_n - \sqrt{3} b_n$. Поэтому

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\big((1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n\big),\\ b_n &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\big((1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n\big). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n} = \sqrt{3}.$$

5. Обозначим $P := 3E - 3A$ и $Q := 3A + 2E$. Тогда

$$\begin{aligned} X^{-1} &= Q^{-1} + \frac{(P/3)^{-1}}{3} = Q^{-1} + P^{-1} = P^{-1}(P+Q)Q^{-1} = P^{-1}(5E)Q^{-1}\\ &= 5(QP)^{-1} = 5(6E + 3(A - 3A^2))^{-1} = \frac{5E}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно $X = 6E/5$.

6. Докажем утверждение индукцией по r. Пусть $r = 0$ и покажем, что фукция $u(n) = a^n$, где $a \neq 0$ является решением рекуррентного соотношения (1) тогда и только тогда, когда a является корнем $f(x)$.

Подставляя $u(n) = a^n$ в рекуррентное соотношение

$$u(n+k) = a_0 u(n) + a_1 u(n+1) + \ldots + a_{k-1} u(n+k-1), \tag{1}$$

получим:

$$\begin{aligned} a^{n+k} = a_0 a^n + a_1 a^{n+1} + \ldots + a_{k-1} a^{n+k-1} \iff & a^n(a^k - a_{k-1}a^{k-1} - \ldots - a_0) = 0\\ \iff & a^n f(a) = 0. \end{aligned}$$

Допустим, что $v(n) = n^{r-1}a^n$ является решением рекуррентного соотношения (1) и a – корень $f(x)$ кратности не менее r и покажем $u(n) = n^r a^n$ является решением (1) тогда и только тогда, когда a – корень $f(x)$ кратности не менее $r + 1$. Подставляя $n^r a^n$ в (1) получим:

$$(n+k)^r a^{n+k} = a_0 n^r a^n + a_1 (n+1)^r a^{n+1} + \ldots + a_{k-1}(n+k-1)^r a^{n+k-1}.$$

Откуда

$$(n+k)v(n+k) = a_0 n v(n) + a_1(n+1)v(n+1) + \ldots + a_{k-1}(n+k-1)v(n+k-1).$$

Так как $v(n)$ является решением (1), то нам необходимо показать, что $v(n)$ удовлетворяет равенству

$$kv(n+k) = a_1 v(n+1) + \ldots + a_{k-1}(k-1)v(n+k-1) \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда a – корень $f(x)$ кратности не менее $r + 1$. Нетрудно заметить, что соотношению (2) соответствует многочлен $xf'(x)$ и по индуктивному преположению $v(n)$ является решением (2) тогда и только тогда, когда a – корень $f'(x)$ кратности не менее r. Таким образом a должно являться корнем $f(x)$ кратности не менее $r + 1$.