Matemaatikavõistlus

Tartu, 03.11.2023

1. Tõestage, et
$$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$$
on irratsionaalarv.

2. Vektorruumi A üle korpuse K nimetatakse *algebraks*, kui selles on (lisaks vektorruumi tehetele) defineeritud elementide omavaheline korrutamine: iga $\mathbf{a},\mathbf{b}\in A$ korral $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\in A$, kusjuures $\mathbf{a}\circ(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})=(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\circ\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\circ(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\circ\mathbf{b}+\mathbf{a}\circ\mathbf{c}$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\circ\mathbf{a}=\mathbf{b}\circ\mathbf{a}+\mathbf{c}\circ\mathbf{a}$, $(\lambda\mathbf{a})\circ\mathbf{b}=\mathbf{a}\circ(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})$ (kõigi $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in A$ ja iga $\lambda\in K$ korral).

   Tõestage, et kui A on lõplikumõõtmeline nulliteguriteta algebra ning $\mathbf{a}\in A\setminus\{\mathbf{0}\}$ ja $\mathbf{b}\in A$, siis võrrandil $\mathbf{a}\circ\mathbf{x}=\mathbf{b}$ on täpselt üks lahend $\mathbf{x}\in A$.

   Märkus. Öeldakse, et elemendid $\mathbf{a},\mathbf{b}\in A$ on algebras A *nullitegurid*, kui $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, aga $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

3. Olgu $a\in\mathbb{R}$. Tõestage, et päratu integraali
$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}$$
väärtus ei sõltu reaalarvust a.

4. Olgu $n\in\mathbb{N}$. Leidke järgmise determinandi väärtus:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Tõestage, et iga positiivsete liikmetega arvjada (a_n) korral kehtib võrratus
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{a_n}\geqslant 4.$$
Tooge ka näide jadast (a_n) nii, et võrratus kehtiks võrdusena.

   Märkus. Kui arvjada (b_n) on ülalt tõkestamata, siis defineeritakse
$$\limsup_{n\to\infty} b_n=\infty.$$
Kui aga (b_n) on ülalt tõkestatud, siis defineeritakse
$$\limsup_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\sup\{b_k\colon k\geqslant n\}.$$

Math Competition

Tartu, 03.11.2023

1. Prove that
$$\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$$
is an irrational number.

2. A linear space A over the field K is called an *algebra* if (in addition to linear space operations) multiplication of its elements has been defined: for every $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ we have $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \in A$ such that $\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{c}$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \circ \mathbf{a} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a} + \mathbf{c} \circ \mathbf{a}$, $(\lambda \mathbf{a}) \circ \mathbf{b} = \mathbf{a} \circ (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$ (for all $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A$ and $\lambda \in K$).

   Prove that if A is a finite dimensional algebra without zero divisors, $\mathbf{a} \in A \setminus \{\mathbf{0}\}$ and $\mathbf{b} \in A$, then the equation $\mathbf{a} \circ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution $\mathbf{x} \in A$.

   Remark. Elements $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ are called *zero divisors* if $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ but $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

3. Assume $a \in \mathbb{R}$. Prove that the value of the improper integral
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)(1 + x^a)}$$
is independent of the value of a.

4. Let $n \in \mathbb{N}$. Calculate the value of the following determinant:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-3 & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Prove that for every positive real sequence (a_n) we have
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \geqslant 4.$$
Also bring an example of a sequence (a_n) for which the inequality holds as equality.

   Remark. If the sequence (b_n) is unbounded from above, it is defined that
$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \infty.$$
If (b_n) is bounded from above, it is defined that
$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{b_k \colon k \geqslant n\}.$$

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Oletame, et $r = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, siis

$$2 = (r - \sqrt{3})^3 = r^3 - 3\sqrt{3}r^2 + 9r - 3\sqrt{3},$$

millest järeldub, et

$$(3r^2 + 3)\sqrt{3} = r^3 + 9r - 2.$$

See on võimatu, sest $\sqrt{3}$ on irratsionaalarv.

Lahendus 2. Vaatleme kuuenda astme polünoomi $p \in \mathbb{C}[x]$, mille tegurite hulk on

$$\left\{x - \left(\iota\sqrt[3]{2} + \varepsilon\sqrt{3}\right) : \varepsilon \in \{1, -1\}, \iota \in \left\{1, \exp\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}, \exp\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}\right\}\right\}.$$

Arendamise järel leiame, et

$$p(x) = x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23.$$

Teadaolevalt on täisarvuliste kordajatega polünoomi p ainsad võimalikud ratsionaalarvulised juured ± 1 ja ± 23. Järelikult $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$, olles polünoomi p (kompleksarvuline) juur, ei saa olla ratsionaalarv.

2. Olgu A lõplikumõõtmeline nulliteguriteta algebra. Olgu $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ algebra A mingi baas, olgu $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Paneme tähele, et siis $\mathbf{a} \circ \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{a} \circ \mathbf{e}_n$ on samuti algebra A baas. Tõepoolest, tegu on n-elemendilise lineaarselt sõltumatu süsteemiga n-mõõtmelises algebras. See süsteem on lineaarselt sõltumatu, sest

$$\lambda_1 \mathbf{a} \circ \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a} \circ \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \circ (\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0},$$

kuna $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ja algebra on nulliteguriteta, siis $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, nüüd muidugi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Esitame vektori $\mathbf{b}$ sellel baasil:

$$\mathbf{b} = \mu_1 \mathbf{a} \circ \mathbf{e}_1 + \ldots + \mu_n \mathbf{a} \circ \mathbf{e}_n.$$

Tähistame

$$\mathbf{c} = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \mu_n \mathbf{e}_n,$$

siis $\mathbf{a} \circ \mathbf{c} = \mathbf{b}$ ja oleme leidnud ühe lahendi võrrandile $\mathbf{a} \circ \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Oletame, et veel $\mathbf{a} \circ \mathbf{d} = \mathbf{b}$, siis nende võrduste lahutamisel saame, et

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

järelikult $\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{0}$, mistõttu $\mathbf{c} = \mathbf{d}$. Oleme saanud, et lahend on üheselt määratud.

3. Tähistame

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)(1 + x^a)}, \qquad I_2 = \int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)(1 + x^a)}.$$

Kuna
$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)} \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \geqslant 0,$$
siis uuritav integraal ja I_2 koonduvad ning uuritava integraali väärtus on $I_1 + I_2$.

Teeme integraalis I_1 muutuja vahetuse $t = \frac{1}{x}$, siis $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ (seega $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$) ning rajad $0 \ldots 1$ muutuvad kujule $\infty \ldots 0$. Saame, et
$$I_1 = -\int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^a})} = \int_{1}^{\infty} \frac{t^a \mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^a+1)}.$$

Niisiis
$$I_1 + I_2 = \int_1^\infty \frac{t^a \mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^a+1)} + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} = \int_1^\infty \frac{(1+x^a)\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} =$$
$$= \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \arctan x - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

4. *Lahendus 1.* Tähistame
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-3 & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Tähistame polünoomi $f = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} \in \mathbb{C}[x]$. Tähistame n. astme ühejuure $\omega = \exp\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}$.

Tõestame, et maatriksi A kõik omaväärtused on $f(\omega^j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n-1$. See võimaldab determinandi välja arvutada, sest maatriksi determinant võrdub omaväärtuste korrutisega (juhul, kui neid on sama palju kui on maatriksi mõõde).

Tõepoolest, arvestades, et $\omega^n = 1$, saame, et
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-3 & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \omega^{2j} \\ \ldots \\ \omega^{(n-1)j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\omega^j) \\ \omega^j f(\omega^j) \\ \omega^{2j} f(\omega^j) \\ \ldots \\ \omega^{(n-1)j} f(\omega^j) \end{pmatrix}$$
$$= f(\omega^j) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \omega^{2j} \\ \ldots \\ \omega^{(n-1)j} \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Nüüd

$$\det A = f(1)f(\omega)f(\omega^2)\cdot\ldots\cdot f(\omega^{n-1}).$$

Saame, et

$$f(1) = 1+2+\ldots+n = \frac{(n+1)n}{2},$$

aga juhul, kui $j = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned}
f(\omega^j) &= 1 + 2\omega^j + 3\omega^{2j} + \ldots + n\omega^{(n-1)j} = \\
&= \frac{(1 + 2\omega^j + 3\omega^{2j} + \ldots + n\omega^{(n-1)j})(\omega^j - 1)}{\omega^j - 1} = \\
&= \frac{\omega^j - 1 + 2\omega^{2j} - 2\omega^j + 3\omega^{3j} - 3\omega^{2j} + \ldots + n - n\omega^{(n-1)j}}{\omega^j - 1} = \\
&= \frac{n}{\omega^j - 1}.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
\det A &= \frac{(n+1)n\cdot n^{n-1}}{2(\omega-1)(\omega^2-1)\cdot\ldots\cdot(\omega^{n-1}-1)} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1}\cdot n^n(n+1)}{2(1-\omega)(1-\omega^2)\cdot\ldots\cdot(1-\omega^{n-1})}.
\end{aligned}$$

Kuna $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, millele lisada 1, on parajasti kõik polünoomi $g = x^n - 1 \in \mathbb{C}[x]$ juured, siis korrutis $(1-\omega)(1-\omega^2)\cdot\ldots\cdot(1-\omega^{n-1})$ on polünoomi $h = \dfrac{x^n-1}{x-1}$ väärtus kohal 1. Selle võime leida näiteks polünoomfunktsioonide pidevust kasutades piirväärtusena:

$$h(1) = \lim_{t\to 1} h(t) = \lim_{t\to 1}\frac{t^n-1}{t-1} = \lim_{t\to 1} nt^{n-1} = n.$$

Kokkuvõttes

$$\det A = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Lahendus 2. Teostame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\
n & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\
n-1 & n & 1 & \ldots & n-3 & n-2 \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1
\end{pmatrix}.$$

ridade-veergudega elementaarteisendusi (need ei muuda determinandi väärtust). Esmalt lahutame 2. reast 3. rea, 3. reast 4. rea jne, kuni n-ndast reast 1. rea. Saame, et

$$A \sim \begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\
1 & 1-n & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1-n & \ldots & 1 & 1 \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1-n
\end{pmatrix}.$$

Järgnevalt lahutame kõigist veergudest 1. veeru. Saame, et

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

Nüüd liidame 1. reale $\dfrac{1}{n}$-ga korrutatud 2. rea, $\dfrac{2}{n}$-ga korrutatud 3. rea jne, kuni $\dfrac{n-1}{n}$-ga korrutatud n-nda rea. Saame, et

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1+2+\ldots+(n-1)}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

On jäänud determinanti arendada 1. rea järgi ning kasutada ära, et

$$1 + \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Lõppvastus tuleb

$$\det A = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Märkus. Seda tüüpi maatriksit A nimetatakse *tsirkulantmaatriksiks* (üldjuhul tsirkuleeritakse suvalist esimest rida $(a_1, \ldots, a_n)$, praeguses ülesandes oli $a_k = k$). Üldise tsirkulantmaatriksi determinanti saab leida lahenduse 1 võtetega, mõne kitsama erijuhu (nt aritmeetilise jada) korral aga ka lahenduse 2 võtetega.

5. Tähistame

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n}.$$

Paneme kõigepealt tähele, et kui $(a_n) = (2^n)$, siis

$$b_n = \frac{2 + 2^2 + \ldots + 2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^{n+2}-2}{2^n} = 4 - \frac{2}{2^n}.$$

Seetõttu

$$\lim_n b_n = 4,$$

muidugi siis ka

$$\limsup_n b_n = 4.$$

Kuna selline geomeetriline jada realiseerib võrdusjuhu, siis uurime liiget $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (mis ülaltoodud erijuhul on 2). Kõigepealt on selge, et kui jada $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ on ülalt tõkestamata, siis ka (b_n) on ülalt tõkestamata, sest

$$b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{a_n} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus

$$\limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} =: \alpha \in [0, \infty).$$

Vastavalt ülemise piirväärtuse definitsioonile, iga fikseeritud $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks N nii, et

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{\alpha + \varepsilon}.$$

(Tõepoolest, supreemumite jada liige $\sup\limits_{n \geqslant k} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ peab jääma mingist indeksist alates vahemikku $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.)

Nüüd, kui $n \gg N$, siis

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} &\geqslant \frac{a_N + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} = \\
&= \frac{a_N}{a_{N+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + \\
&\quad + \frac{a_{N+1}}{a_{N+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + \\
&\quad + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \\
&\quad + 1 + \\
&\quad + \frac{a_{n+1}}{a_n} > \\
&> \left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right)^{n-N} + \left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right)^{n-N-1} + \ldots + \frac{1}{\alpha + \varepsilon} + 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}.
\end{aligned}$$

Juhul $\alpha \in [0, 1)$ kehtib (piisavalt väikese ε korral) $\dfrac{1}{\alpha + \varepsilon} > 1$, seega parem pool on tõkestamata ning järelikult $\limsup\limits_n b_n = \infty$.

Vaatleme juhtu $\alpha \geqslant 1$. Saame, et

$$\begin{aligned}
b_n &> \left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right)^{n-N} + \left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right)^{n-N-1} + \ldots + \frac{1}{\alpha + \varepsilon} + 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} = \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-N+1}}{1 - \frac{1}{\alpha+\varepsilon}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}.
\end{aligned}$$

Ülemise piirväärtuse monotoonsuse tõttu

$$\limsup_n b_n \geqslant \lim_n \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-N+1}}{1 - \frac{1}{\alpha+\varepsilon}} + \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha + \varepsilon}{\alpha + \varepsilon - 1} + \alpha.$$

Kuna selline võrratus kehtib iga $\varepsilon > 0$ korral, siis juhul $\alpha = 1$ saame, et $\limsup\limits_n b_n = \infty$ (sest $1 + \dfrac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}$ saab olla suurem mistahes reaalarvust).

Juhul $\alpha > 1$ osutub, et $\sup\left\{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha+\varepsilon-1} : \varepsilon > 0\right\} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ (protsessis $\varepsilon \to 0+$ kasvava ülalt tõkestatud suuruse piirväärtus), mistõttu

$$\limsup_n b_n \geqslant \alpha + \frac{\alpha}{\alpha-1} = 2 + (\alpha-1) + \frac{1}{\alpha-1} \geqslant 4.$$

Märkus. Lahendusest järeldub, et *ainus* võimalus võrduse saamiseks ongi $\alpha - 1 = 1$ ehk $\alpha = 2$.