Matemaatika treeningvõistlus

Tartu, 05.11.2021

1. Olgu n naturaalarv, $n \geqslant 2$, olgu maatriksid $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ sellised, et
$$ABC = E$$
(sümbol E tähistagu n-järku ühikmaatriksit). Tehke iga võrduse kohta kindlaks, kas see kehtib alati või ei tarvitse mõne sellise maatriksite kolmiku A, B, C korral kehtida:
$$BAC = E, \quad ACB = E, \quad CAB = E, \quad BCA = E, \quad CBA = E.$$

2. Leidke rea
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$$
summa või tõestage, et see rida on hajuv.

3. Tähistagu p_n tõenäosust, et suvaliselt valitud elementidega maatriksi $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_2)$ determinant on nullist erinev.

   (a) Leidke p_n väärtus.

   (b) Tõestage, et leidub piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} p_n =: p > 0$.

   Märkus. Korpuse $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ arvutusreeglid on teatavasti sellised, et liitmine ja korrutamine toimuvad *modulo* 2, nii siis $a + 0 = a$, $1 + 1 = 0$, $a \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, kus $a \in \mathbb{Z}_2$.

4. Leidke kõik positiivsed täisarvud n, mille korral leidub täisarvmaatriks
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$$
nii, et $A^n = E$ ja $A^k \neq E$ kõigi täisarvude $k = 1, \ldots, n-1$ korral. (Sümbol E tähistab ühikmaatriksit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

5. Olgu funktsioon $f\colon [a, b] \to [a, b]$ sürjektiivne ja diferentseeruv lõigus $[a, b]$. Tõestage, et leiduvad punktid $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [a, b]$ nii, et kehtib võrdus
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_1) f'(x_2)(x_3 - x_4).$$

Math Competition

Tartu, 05.11.2021

1. Let the matrices $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (where n is a natural number greater than 1) be such that
$$ABC = E$$
(the symbol E denotes the unit matrix of n-th order). Determine for all the following equalities whether it always holds or may not hold for some such matrices A, B, C:
$$BAC = E, \quad ACB = E, \quad CAB = E, \quad BCA = E, \quad CBA = E.$$

2. Find the sum of the series
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$$
or prove that the series is divergent.

3. Denote by p_n the probability that the determinant of a matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_2)$ whose elements have been chosen arbitrarily, is not zero.
   (a) Find p_n.
   (b) Prove that there exists a limit $\lim_{n\to\infty} p_n =: p > 0$.

   Remark. As is known, calculation in the field $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ is defined in a way that addition and multiplication are performed *modulo* 2, i.e., $a + 0 = a$, $1 + 1 = 0$, $a \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, where $a \in \mathbb{Z}_2$.

4. Find all positive integers n for which there exists a matrix with integer elements
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$$
such that $A^n = E$ and $A^k \neq E$ for all integers $k = 1, \ldots, n-1$. (The symbol E denotes the unit matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

5. Let the function $f\colon [a, b] \to [a, b]$ be surjective and differentiable in $[a, b]$. Prove that there exist points $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [a, b]$ such that
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_1)f'(x_2)(x_3 - x_4).$$

Lahendused

1. Kuna $ABC = E$, siis $(\det A)\cdot(\det B)\cdot(\det C) = \det(ABC) = \det E = 1$, järelikult on maatriksid A, B, C kõik pööratavad. Saame, et $CABC = C$, millest C^{-1}-ga paremalt korrutades leiame, et $CAB = E$; analoogiliselt saame võrduse $BCA = E$.

   Valime nüüd maatriksid A ja B nii, et $AB \neq BA$, siis $ABC \neq BAC$ (sest kui kehtiks $ABC = BAC$, siis paremalt C^{-1}-ga korrutades tuleks $AB = BA$, vastuolu). Analoogiliselt saame ka ülejäänud kahe võrduse vääramise.

   Konkreetse kontranäite koostamiseks on muidugi palju võimalusi. Võime näiteks tähele panna, et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ning kui $n > 2$, siis ülejäänud osas „jätkata“ neid maatrikseid ühikmaatriksiks (st. mujal nullid, peadiagonaalil ühed).

2. Kuna

$$k^4 + k^2 + 1 = (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1),$$

   siis

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{k^2 - k + 1} - \frac{\frac{1}{2}}{k^2 + k + 1} = f(k-1) - f(k),$$

   kus

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + x + 1}.$$

   Niisiis

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \sum_{k=1}^{n}(f(k-1) - f(k)) = f(0) - f(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1}\right),$$

   mistõttu uuritava rea summa (osasummade jada piirväärtus) on $\frac{1}{2}$.

   Märkus. Ratsionaalmurdude teooriast on teada, et korpuse $Q(\mathbb{R}[x])$ element $\frac{x}{x^4 + x^2 + 1}$ esitub ühesel moel algmurdude summana, kusjuures iga algmurru nimetajas on lineaarpolünoom või tema aste või reaalarvudes taandumatu ruutpolünoom või tema aste (lugejas on vastavalt 0- või 1-astme polünoom). Niisiis algmurdudeks esituse leidmiseks on vaja kõigepealt tegurdada polünoom $x^4 + x^2 + 1$, kuni saame taandumatud tegurid ringist $\mathbb{R}[x]$.

   Selleks tegurdamiseks on mitu võimalust. Üks võimalus on selline:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x).$$

   Teine võimalus on panna tähele, et polünoom $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$ tegurdub kergesti lineaarteguriteni kompleksarvudes, kuna tegu on biruutpolünoomiga. Saame, et

$$t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t = \mathrm{e}^{\pm \frac{2\pi}{3}\mathrm{i}},$$

   mistõttu

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \cdot \left(x - \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \cdot \left(x - \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \cdot \left(x - \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}\right).$$

   Grupeerides tegurid teisiti ümber, saamegi, et

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \cdot \left(x - \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \cdot \left(x - \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \cdot \left(x - \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}\right) =$$
$$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Niisiis

$$\frac{x}{x^4+x^2+1} = \frac{\alpha x+\beta}{x^2-x+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+x+1}$$

ehk

$$x = (\alpha x+\beta)(x^2+x+1) + (\gamma x+\delta)(x^2-x+1). \tag{1}$$

Siin kordajad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ määrame kas avades mõlemal poolel sulud ja võrdsustades kordajad (nt näeme kohe, et $\alpha+\gamma=0$, $\beta+\delta=0$ jms), või valides võrduses (1) x-le mugavaid väärtusi (või mõlemat korraga). Töötada võime soovi korral nii ringis $\mathbb{R}[x]$ kui ka ringis $\mathbb{C}[x]$, näiteks valides $x=0$, $x=\mathrm{i}$, $x=1$ jms. Tekkivast lineaarvõrrandisüsteemist leiame, et $\alpha=\gamma=0$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\delta=-\frac{1}{2}$.

3. a) Kõigi selliste n-järku maatriksite koguarv on 2^{n^2}. Uurime võimaluste arvu, saamaks mittenullist determinanti.

Esimese rea võime valida suvaliselt, v.a. nullrida: selleks on 2^n-1 võimalust. Teine rida ei tohi olla esimese lineaarkattes ehk ei tohi olla esimese koopia ja ei tohi olla nullrida: 2^n-2 võimalust. Üldiselt $(k+1)$. rida ei tohi olla eelmise k rea lineaarkattes, mille vektorite koguarv (kõikvõimalikud summad ning nullrida) on 2^k, mistõttu $(k+1)$. rea moodustamiseks on 2^n-2^k võimalust. (Lineaarkatte moodustamisel muid võimalusi ei tule kui summad, sest kordajateks saavad olla vaid 0 ja 1. Ükski kaks summat ei võrdu, muidu oleks mingite ridade mittetriviaalne lineaarkombinatsioon võrdne nulliga.)

Kokku on mittenulliste determinantide koguarv

$$(2^n-1)\cdot(2^n-2)\cdots(2^n-2^k)\cdots(2^n-2^{n-1}).$$

Otsitav tõenäosus on järelikult

$$p_n = \frac{2^n-1}{2^n}\cdot\frac{2^n-2}{2^n}\cdots\frac{2^n-2^k}{2^n}\cdots\frac{2^n-2^{n-1}}{2^n} = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right).$$

b) Saame, et

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^k}\right) \geqslant \frac{1}{2}\cdot\left(1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{4} > 0.$$

Märkus 1. Lõpmatu korrutise

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

koonduvust on võimalik uurida logaritmi abil, nimelt logaritmi pidevuse tõttu koondub osakorrutiste jada mittenulliseks piirväärtuseks parajasti siis, kui koondub osakorrutiste logaritmide jada ehk jada liikmetega

$$q_n = \ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

Kuna

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)}{\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)} = \frac{1}{2} < 1,$$

siis d'Alembert'i tunnuse kohaselt koondub uuritav jada (q_n), järelikult ka uuritav lõpmatu korrutis.

Märkus 2. Uuritav lõpmatu korrutis on Euleri funktsiooni

$$\phi(q) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)$$

väärtus $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. *Lahendus 1.* Tingimus $A^n = E$ annab, et maatriksi A minimaalne polünoom $p \in \mathbb{Z}[x]$ on tegur polünoomile $x^n - 1$. Olgu kompleksarvud ε_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ polünoomi $x^n - 1 \in \mathbb{C}[x]$ juured (n-astme ühejuured). Teadupärast ühejuured on kõik mittereaalsed, välja arvatud $\varepsilon_0 = 1$ ning paaris n korral ka $\varepsilon_{\frac{n}{2}} = -1$.

Kuna minimaalne polünoom on maatriksi karakteristliku polünoomi tegur ning karakteristliku polünoomi aste on 2, siis on kaks varianti. Esiteks, kui $\deg p = 1$, on ainsad võimalused, et $p = x - 1$ (seega $A = E$) või $p = x + 1$ (seega $A = -E$, järelikult $A^2 = E$).

Teiseks, kui $\deg p = 2$, siis on mingid kaks $\varepsilon_k, \varepsilon_\ell$ (kus $k \neq \ell$) polünoomi p juured (kui teda vaadelda elemendina ringis $\mathbb{C}[x]$), kusjuures $\varepsilon_\ell = \overline{\varepsilon_k} =: \varepsilon$, sest p on reaalsete (isegi täisarvuliste) kordajatega. Saame, et $p = (x - \varepsilon)(x - \overline{\varepsilon}) = x^2 - 2(\operatorname{Re}\varepsilon)x + 1$. Muuseas $\operatorname{Re}\varepsilon \in \mathbb{Z}$, mistõttu $\operatorname{Re}\varepsilon \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$.

Juhtum $\operatorname{Re}\varepsilon = 0$ tähendab, et $p = x^2 + 1$, seega $A^2 + E = \Theta$ ja järelikult $A^4 - E = \Theta$. Sobiv maatriks on $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Juhtum $\operatorname{Re}\varepsilon = \frac{1}{2}$ tähendab, et $p = x^2 - x + 1$, seega ε on 6. astme algjuur, mistõttu $A^6 = E$. Sobiv maatriks on $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Juhtum $\operatorname{Re}\varepsilon = -\frac{1}{2}$ tähendab, et $p = x^2 + x + 1$, seega ε on 3. astme algjuur, mistõttu $A^3 = E$. Sobiv maatriks on $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Juhtumid $\operatorname{Re}\varepsilon = \pm 1$ pole võimalikud, sest siis oleks $p = (x-1)^2$ või $p = (x+1)^2$, aga kuna $p \mid x^n - 1$, ei saa polünoomil p olla kordseid juuri.

Kokkuvõttes on kõik variandid $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Lahendus 2 (Hendrik Vija). Eeldame, et $n \geqslant 2$ (juhtum $n = 1$ lahendub triviaalselt). Paneme tähele, et $A^2 = (a+d)A - (\det A)E$. (Selle võrduse kehtivus on nähtav vahetu arvutamise teel, või arvestades, et maatriksi A karakteristliku polünoomi $\det(A - xE)$ $n-1$. astme liikme kordaja tuleb maatriksi jälg $\operatorname{tr} A$ ning vabaliige tuleb polünoomi väärtus kohal $x = 0$ ehk $\det A$. Selliselt arutledes tuleb veel teada, et maatriks ise rahuldab oma karakteristlikku võrrandit.)

Tingimus $(\det A)^n = \det(A^n) = \det E = 1$ annab, et $\det A \in \{1, -1\}$.

- Juhul, kui $\det A = -1$, siis $A^2 = (\operatorname{tr} A)A + E$, järelikult $A^3 = ((\operatorname{tr} A)^2 + 1)A + (\operatorname{tr} A)E$ ning $A^4 = ((\operatorname{tr} A)^3 + 2(\operatorname{tr} A))A + ((\operatorname{tr} A)^2 + 1)E$. Üldiselt saab induktsiooniga näidata, et $A^k = p_k(\operatorname{tr} A)A + q_k(\operatorname{tr} A)E$, kus polünoomide jadad (p_k) ja (q_k) rahuldavad järgmisi tingimusi: $q_k = p_{k-1}$ ja $p_k = x \cdot p_{k-1} + q_{k-1}$, $p_1 = 1$, $q_1 = 0$.
  Ülesande tingimuste kohaselt peab kehtima teatava n korral $A^n = E$ ehk $p_n(\operatorname{tr} A) = 0$ ja $q_n(\operatorname{tr} A) = 1$. Juhul, kui $|\operatorname{tr} A| \geqslant 2$, tõestame induktsiooniga, et $|p_k(\operatorname{tr} A)| \geqslant |q_k(\operatorname{tr} A)|$, siit nähtub, et sellel juhul pole võimalik täita tingimust $A^n = E$. Tõepoolest, baasjuhul saame, et võrratus kehtib triviaalselt ($|\operatorname{tr} A| \geqslant 1$), sammu teostame järgnevalt:

  $$|p_k(\operatorname{tr} A)| \geqslant |\operatorname{tr} A| \cdot |p_{k-1}(\operatorname{tr} A)| - |q_{k-1}(\operatorname{tr} A)| \geqslant |q_{k-1}(\operatorname{tr} A)| \cdot (|\operatorname{tr} A| - 1) \geqslant |q_{k-1}(\operatorname{tr} A)|.$$

  Analoogilise võrratuse tõestame ka juhul, kui $\operatorname{tr} A = 1$, siis saame, et $p_k(\operatorname{tr} A) = p_{k-1}(\operatorname{tr} A) + q_{k-1}(\operatorname{tr} A) \geqslant 2q_{k-1}(\operatorname{tr} A) \geqslant q_{k-1}(\operatorname{tr} A)$.
  Niisiis peab kehtima $\operatorname{tr} A = 0$ või $\operatorname{tr} A = -1$. Kui $\operatorname{tr} A = 0$, siis $A^2 = E$, sobivaks maatriksiks on $A = -E$. Kui $\operatorname{tr} A = -1$, siis saab matemaatilise induktsiooni teel tõestada, et $p_k(-1) = (-1)^k F_k$ ja $q_k(-1) = (-1)^{k-1} F_{k-1}$, kus (F_k) on Fibonacci arvude jada. Seega pole võimalik, et $p_n(-1) = 0$ ja $q_n(-1) = 1$.

- Olgu nüüd $\det A = 1$. Analoogiliselt eelmise punktiga tuletame seose $A^k = p_k(\operatorname{tr} A)A + q_k(\operatorname{tr} A)E$, kus polünoomide jadad (p_k) ja (q_k) rahuldavad nüüd tingimusi $q_k = -p_{k-1}$ ja $p_k = x \cdot p_{k-1} + q_{k-1}$. Analoogselt eelnevaga annab ka nüüd juhtum $|\operatorname{tr} A| \geqslant 2$ samasuguse vastuolu.
  Juhul $\operatorname{tr} A = 0$ saame, et $A^2 = -E$, mistõttu $A^4 = E$.
  Juhul $\operatorname{tr} A = 1$ saame, et $A^3 = -E$, mistõttu $A^6 = E$.
  Juhul $\operatorname{tr} A = -1$ saame, et $A^3 = E$.
  Konkreetsed maatriksite näited leiame kõigi juhtude jaoks samamoodi nagu eelmises lahenduses.

5. Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi, funktsiooni f pidevuse tõttu lõigus $[a, b]$ ja f sürjektiivsuse tõttu leiduvad arvud $x_1, x_3, x_4 \in [a, b]$ nii, et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_1)(b-a) = f(x_1)(f(x_3) - f(x_4)).$$

Rakendades funktsioonile f Lagrange'i keskväärtusteoreemi lõigus otspunktidega x_3 ja x_4, leiame, et

$$f(x_3) - f(x_4) = f'(x_2)(x_3 - x_4),$$

kus x_2 asub punktide x_3 ja x_4 vahel. Pannes need kaks võrdust kokku, saame otsitava tingimuse.