Matemaatika treeningvõistlus

Tartu, 30.10.2020

1. Tõesta, et iga positiivne ratsionaalarv on esitatav kujul

$$a_0 + \frac{a_1}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n+1)!},$$

   mingi positiivse täisarvu n korral, kus $a_k \in \mathbb{Z}$ ($k \in \{0, \ldots, n\}$), $a_0 \geq 0$ ja $0 \leq a_k \leq k$ iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral.

2. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille korral

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 f(x)$$

   kõigi $x \in \mathbb{R}$ ja $h > 0$ jaoks ning kehtib vähemalt üks järgmistest tingimustest:

   (a) f on pidev,

   (b) f on *lokaalselt kumer*, st iga $x \in \mathbb{R}$ korral leidub $\varepsilon > 0$ nii, et f on *kumer* vahemikus $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ehk $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ kõigi $\lambda \in (0,1)$ ja $a, b \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ korral.

3. Olgu $z_1, \ldots, z_n$ kompleksarvud. Tõesta, et

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{\sqrt{2^k}} \right|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{\sqrt{2^n}} \right|^2.$$

4. Tähistagu $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ kõigi reaalsete 2×2 maatriksite hulka. Tõesta, et iga $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ korral

   (a) $A^2 + |A|E = (\operatorname{tr} A)A$, (siin $|A|$ on maatriksi A determinant ja $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$ on tema jälg ning E on ühikmaatriks),

   (b) leiduvad $B, C \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ nii, et $A = B^2 + C^2$.

5. Arvuta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{n x^x + x^{x+1}}{(1+x)^x} \, \mathrm{d}x.$$

Math Competition

Tartu, 30.10.2020

1. Prove that every positive rational number can be represented as
$$a_0 + \frac{a_1}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n+1)!},$$
for some positive integer n, where $a_k \in \mathbb{Z}$ ($k \in \{0, \ldots, n\}$), $a_0 \geq 0$, and $0 \leq a_k \leq k$ for all $k \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that
$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 f(x)$$
for all $x \in \mathbb{R}$ and $h > 0$, and also at least one of the following conditions is satisfied:
   (a) f is continuous,
   (b) f is *locally convex* meaning that for every $x \in \mathbb{R}$ there exists $\varepsilon > 0$ such that f is *convex* in the interval $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, that is, $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ for all $\lambda \in (0,1)$ and $a, b \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

3. Let $z_1, \ldots, z_n$ be complex numbers. Prove that
$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{\sqrt{2^k}} \right|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{\sqrt{2^n}} \right|^2.$$

4. Let $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ denote the set of all real 2×2 matrices. Prove that for all $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$:
   (a) one has $A^2 + |A|E = (\mathrm{tr}\, A)A$, (here, $|A|$ denotes the determinant of A, $\mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22}$ denotes its trace, and E denotes the identity matrix),
   (b) there exist $B, C \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ such that $A = B^2 + C^2$.

5. Calculate
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{nx^x + x^{x+1}}{(1+x)^x} \,\mathrm{d}x.$$

Lahendused

1. Lahendus tugineb jäägiga jagamisele ja matemaatilisele induktsioonile:

$$\frac{p}{q}=\frac{p(q-1)!}{q!}=\frac{sq+a_{q-1}}{q!}=\frac{s}{(q-1)!}+\frac{a_{q-1}}{q!},$$

   kus $0\le a_{q-1}<q$, ning jagamisi jätkatakse, kuni viimaseks jagajaks on 2.

2. Mõlemal juhul on funktsioon f *lokaalselt tõkestatud*.

   Tõepoolest, (a)-osas kasutame vahetult pidevuse definitsiooni: fikseerime $x\in\mathbb{R}$, siis leidub $\varepsilon>0$ nii, et kui $|y-x|<\varepsilon$, siis $f(x)-1<f(y)<f(x)+1$.

   (b)-osas ülalt tõkestatus järeldub vahetult lokaalse kumeruse definitsioonist: olgu $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$, siis $y=\lambda\cdot(x-\varepsilon)+(1-\lambda)\cdot(x+\varepsilon)$ (kus $\lambda=\dfrac{x+\varepsilon-y}{2\varepsilon}$), mistõttu

$$f(y)\le\lambda f(x-\varepsilon)+(1-\lambda)f(x+\varepsilon).$$

   Ülesande tingimuse põhjal $f(x)\ge 0$ iga $x\in\mathbb{R}$ korral.

   Kirjutame ülesande tingimuse ümber kujule

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\le f\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{|y-x|}{4}$$

   Fikseerides x ja minnes piirile $y\to x$, kusjuures x ümbruses kehtib $|f(y)|\le M$, saame, et

$$|f'(x)|\le M\cdot 0=0.$$

   Niisiis on f konstantne funktsioon. Teiselt poolt, vahetu kontroll näitab, et kõik konstantsed funktsioonid rahuldavad ülesande tingimust.

   Märkus. Saab näidata, et lokaalselt kumer funktsioon on ka lokaalselt (alt) tõkestatud. Olgu konkreetsuse mõttes $x-\varepsilon<x<y$ (teistpidist paigutust vaadeldakse analoogiliselt ja üldine alumine tõke on miinimum kahest leitavast tõkkest). Olgu $x=\lambda(x-\varepsilon)+(1-\lambda)y$, täpsemalt $\lambda=\dfrac{y-x}{y-x+\varepsilon}$. Nüüd kumeruse tõttu

$$f(x)\le\lambda f(x-\varepsilon)+(1-\lambda)f(y)=\lambda f(x-\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{y-x+\varepsilon}f(y),$$

   millest

$$f(y)\ge\frac{y-x+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot(f(x)-\lambda f(x-\varepsilon)).$$

   Kui $f(x)>\lambda f(x-\varepsilon)$, siis, arvestades, et $\dfrac{y-x+\varepsilon}{\varepsilon}>1$, kehtib $f(y)\ge f(x)-\lambda f(x-\varepsilon)\ge\min\{f(x),f(x)-f(x-\varepsilon)\}$. Kui aga $f(x)<\lambda f(x-\varepsilon)$, siis arvestades, et $\dfrac{y-x+\varepsilon}{\varepsilon}<2$, kehtib $f(y)\ge 2(f(x)-\lambda f(x-\varepsilon))\ge\min\{2f(x),2f(x)-2f(x-\varepsilon)\}$. Kokkuvõttes

$$f(y)\ge\min\{f(x),f(x)-f(x-\varepsilon),2f(x),2f(x)-2f(x-\varepsilon),0\}.$$

3. Võrratuse saame kirjutada ümber kujul

$$\frac{2^n-1}{2^n}\cdot\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\ge\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{\sqrt{2^k}}\right|^2.$$

Kolmnurga võrratus ja Cauchy võrratus annavad, et

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{\sqrt{2^k}}\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{z_k}{\sqrt{2^k}}\right|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right),$$

nagu soovitud.

4. (a) Vahetu kontroll.

   (b) Rakendame (a)-osa maatriksile $A + tE$. Saame, et

$$A = A + tE - tE = \frac{(A+tE)^2 + |A+tE|E}{\mathrm{tr}(A+tE)} - tE = \frac{(A+tE)^2}{\mathrm{tr}(A+tE)} + \left(\frac{|A+tE|}{\mathrm{tr}(A+tE)} - t\right) E.$$

   Kuna $\mathrm{tr}(A + tE) \to \infty$ protsessis $t \to \infty$, on esimene liidetav piisavalt suure t korral mingi maatriksi ruut. Teine liidetav on alati maatriksi ruut (v.a. kui $\mathrm{tr}(A + tE) = 0$), sest $E = E^2$ and $-E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$ on maatriksi ruudud.

5. Tõestame järgmise lemma. Kui f ja g on pidevad ning $f(x) \to L$ protsessis $x \to \infty$, siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) g\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x = L \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Tõestus. Tähistame $h(x) = f(x) - L$ ning paneme tähele, et

$$\frac{1}{n} \int_0^n f(x) g\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_0^n h(x) g\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x + \frac{L}{n} \int_0^n g\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x.$$

Märkides $t = \frac{x}{n}$, saame, et

$$\frac{L}{n} \int_0^n g\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x = L \int_0^1 g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Et g on pidev lõigus $[0, 1]$, on ta selles lõigus tõkestatud, seega on jäänud näidata, et

$$\frac{1}{n} \int_0^n h(x) \, \mathrm{d}x \xrightarrow[n]{} 0$$

Iga $\varepsilon > 0$ korral fikseerime N nii, et $|h(x)| < \varepsilon$ kui $x > N$. Siis

$$\left|\frac{1}{n} \int_0^n h(x) \, \mathrm{d}x\right| \leq \left|\frac{1}{n} \int_0^N h(x) \, \mathrm{d}x\right| + \varepsilon \frac{1}{n} \int_N^n \mathrm{d}x \leq \left|\frac{1}{n} \int_0^N h(x) \, \mathrm{d}x\right| + \varepsilon \xrightarrow[n]{} \varepsilon.$$

Kuna $\varepsilon > 0$ oli suvaline, siis järeldub siit lemma väide. □

Ülesande lahendamiseks olgu $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \to \mathrm{e}^{-1}$ ja $g(x) = 1+x$ ning rakendame lemmat. Otsitav integraal võrdub arvuga

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \int_0^1 (1+x) \, \mathrm{d}x = \frac{3}{2\mathrm{e}}.$$