Tartu Ülikooli matemaatikavõistlus

Tartu, 07.11.2026

Ülesanded

1. Olgu n positiivne täisarv ja olgu A_n selline $n \times n$ maatriks, mille peadiagonaalil on nullid ja ülejäänud kohtades ühed. Arvutada maatriksi A_n determinant.

2. Olgu n positiivne täisarv ning olgu antud reaalarvud $x_1 < \ldots < x_n$. Vaatleme järgmisi väiteid:

   A) leiduvad reaalarvud $y_0 < \ldots < y_n$ nii, et iga $i = 1, \ldots, n$ korral kehtib $x_i = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$;

   B) iga positiivse paaritu täisarvu k ja iga $j = 1, \ldots, n-k$ korral kehtib

   $$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (x_{j+i+1} - x_{j+i}) > 0.$$

   Kas väitest A järeldub väide B? Kas väitest B järeldub väide A?

3. Olgu $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, et $f(0) = 0$. Vaatleme järgmisi väiteid:

   A) suvaliste $x, y \in [0, \infty)$ ja $\lambda \in (0, 1)$ korral kehtib võrratus $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$;

   B) suvaliste $a, b \in [0, \infty)$ korral kehtib võrratus $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

   Kas väitest A järeldub väide B? Kas väitest B järeldub väide A?

4. Vaatleme funktsioonide hulka

   $$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ on pidev}, \ \forall x \in \mathbb{R} : f(f(x)) = x + 1\}.$$

   Leida hulga

   $$\{f(x) - x \mid f \in F, \ x \in \mathbb{R}\}$$

   infiimum ja supreemum.

5. Olgu n positiivne täisarv ja olgu $M = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_2)$. Olgu P hulga M selline alamhulk, mis koosneb kõigist maatriksitest, mille igas reas ja igas veerus on täpselt üks nullist erinev element. Olgu $\sim$ vähim ekvivalentsiseos hulgal M, mis sisaldab kõiki paare kujul (A, B), kus $A - B \in P$. Leida seose $\sim$ ekvivalentsiklaaside arv.

Lahendused

1. Vastus: $\det A_n = (n-1)(-1)^{n-1}$.

   Lahendus. Vaatleme maatriksi A_n determinanti. Liidame esimesele reale kõik ülejäänud read. Esimese rea kõik elemendid võrduvad nüüd $(n-1)$-ga. Viime $n-1$ determinandi ette. Esimese rea kõik elemendid võrduvad nüüd ühega. Lahutame esimese rea kõigist ülejäänud ridadest. Allpool peadiagonaali on nüüd nullid ja peadiagonaalil üks ja $n-1$ miinus ühte. Determinandi väärtus on seega $(-1)^{n-1}$, koos välja toodud teguriga $(n-1)(-1)^{n-1}$.

2. Vastus: väited A ja B on samaväärsed.

   Lahendus. Iga $i = 1, \ldots, n-1$ korral tähistame $d_i = x_{i+1} - x_i$. Paneme tähele, et väide A on samaväärne väitega, et leidub selline reaalarv y_0, et seostega $y_i = 2x_i - y_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ defineeritud arvud $y_1, \ldots, y_n$ rahuldavad ahelat $y_0 < \ldots < y_n$. Olgu y_0 suvaline reaalarv ja olgu arvud $y_1, \ldots, y_n$ defineeritud nagu enne. Iga $i = 1, \ldots, n$ korral tähistame $v_i = x_i - y_{i-1}$. Paneme tähele, et võrduse $x_i = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ tõttu on võrratus $y_{i-1} < y_i$ samaväärne võrratusega $y_{i-1} < x_i$ ehk $v_i > 0$. Seega on ahela $y_0 < \ldots < y_n$ kehtivus samaväärne sellega, et arvud $v_i, \ldots, v_n$ on positiivsed.

   Näitame, et iga mittenegatiivse täisarvu k ja iga $j = 1, \ldots, n-k$ korral on võrratus $v_{j+k} > 0$ samaväärne võrratusega

   $$(-1)^k \left(v_j - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i d_{j+i} \right) > 0.$$

   Kui $k = 0$, on samaväärsus ilmne. Oletame, et samaväärsus kehtib mingi k korral, ja näitame, et see kehtib ka $k+1$ korral. Olgu $j \in \{1, \ldots, n-k-1\}$. Induktsiooni eeldusest saame

   $$(-1)^k \left(v_{j+1} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i d_{j+1+i} \right) > 0.$$

   Teisendame vasakut poolt:

   $$(-1)^k \left(v_{j+1} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i d_{j+1+i} \right) = (-1)^k \left(d_j - v_j - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i d_{j+1+i} \right) =$$
   $$= (-1)^{k+1} \left(v_j - d_j + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i d_{j+1+i} \right) = (-1)^{k+1} \left(v_j - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_{j+i} \right).$$

   Sellega on samaväärsus $k+1$ jaoks tõestatud.

Valime tõestaud väites nüüd $k = 0, \ldots, n-1$ ja $j = 1$. Saame, et võrratused $v_1 > 0, \ldots, v_n > 0$ on samaväärsed võrratustega

$$(-1)^k \left(x_1 - y_0 - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i d_{1+i} \right) > 0,$$

kus $k = 0, \ldots, n-1$. Võrratusi $v_1 > 0, \ldots, v_n > 0$ tõesteks muutva arvu y_0 olemasolu on seega samaväärne sellega, et leidub selline arv X, et iga $k = 0, \ldots, n-1$ korral

$$(-1)^k \left(X - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i d_{1+i} \right) > 0.$$

Paaris k jaoks saame

$$X > 0,\ X > d_1 - d_2,\ X > d_1 - d_2 + d_3 - d_4 \ldots$$

ja paaritute k jaoks saame

$$X < d_1,\ X < d_1 - d_2 + d_3,\ X < d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + d_5 \ldots$$

Välja toodud võrratusi rahuldav arv X leidub parajasti siis, kui kõik alamtõkked on väiksemad kõigist ülemtõketest.

Kui võrdleme alamtõkkeid vähemalt sama suure järjekorranumbriga ülemiste tõketega, saame väite B võrratused paaritu j jaoks. Kui võrdleme alamtõkkeid väiksema järjekorranumbriga ülemiste tõketega, saame samad võrratused paaris j jaoks.

3. Vastus: väitest A järeldub väide B, vastupidine implikatsioon ei kehti.

   Lahendus. Näitame, et väitest A järeldub väide B. Eeldame, et A kehtib. Esmalt näitame, et kui $0 \leq x_1 < x_2 < x_3$, siis

   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_3)}{x_3 - x_2}.$$

   Defineerime $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Paneme tähele, et $\lambda \in (0,1)$ ja $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$. Eelduse A kohaselt saame

   $$\begin{aligned}
   f(x_2) &\geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3) \iff \\
   (1-\lambda)f(x_2) + \lambda f(x_2) &\geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3) \iff \\
   (1-\lambda)\big(f(x_2) - f(x_1)\big) &\geq \lambda\big(f(x_3) - f(x_2)\big) \iff \\
   \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) &\geq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big) \iff
   \end{aligned}$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Näitame nüüd, et kehtib B. Olgu $a, b \in [0, \infty)$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a \leq b$. Paneme tähele, et eelduse $f(0) = 0$ tõttu on võrratuse $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ kehtivus ilmne, kui $a = 0$. Seega võime eeldada, et $0 < a \leq b$. Vaatleme esmalt juhtu $a = b$. Tõestatav võrratus võtab siis kuju $f(2a) \leq 2f(a)$. Rakendame eelnevalt tõestatud väidet, võttes $x_1 = 0$, $x_2 = a$ ja $x_3 = 2a$. Eeldust $f(0) = 0$ arvestades saame tulemuseks

$$\begin{aligned}
\frac{f(a)-f(0)}{a-0} &\geq \frac{f(2a)-f(a)}{2a-a} \iff \\
\frac{f(a)}{a} &\geq \frac{f(2a)-f(a)}{a} \iff \\
f(a) &\geq f(2a)-f(a) \iff \\
2f(a) &\geq f(2a).
\end{aligned}$$

Vaatleme nüüd juhtu $0 < a < b$. Rakendame eelnevalt tõestatud väidet komplektidele $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $x_3 = b$ ja $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = a + b$. Pannes saadud võrratused kokku, jõuame võrratuseni

$$\begin{aligned}
\frac{f(a)-f(0)}{a-0} &\geq \frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b} \iff \\
\frac{f(a)}{a} &\geq \frac{f(a+b)-f(b)}{a} \iff \\
f(a) &\geq f(a+b)-f(b) \iff \\
f(a)+f(b) &\geq f(a+b).
\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et väitest A järeldub tõepoolest väide B.

Näitame nüüd, et leidub võrdust $f(0) = 0$ rahuldav funktsioon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, mille puhul kehtib B, kuid mitte A.

Otsime lõpliku arvu sõlmedega tükiti lineaarsete funktsioonide seast. Selline funktsioon rahuldab väidet A parajasti siis, kui iga järgmise lõigu tõus on väiksem kui eelmise oma. Seega on meil vaja funktsiooni, kus vähemalt ühes sõlmes kehtib vastupidine. Paneme aga tähele, et esimese sõlme puhul peab teise lõigu tõus olema väiksem kui esimese oma. Tõepoolest, vastasel juhul saame vastuolu väitega B, kui võtame b võrdseks esimese sõlmega ja a piisavalt väikese.

Siit saame teha järelduse, et sõlmesid peab olema vähemalt kaks. Otsime kontranäidet kahe sõlmega funktsioonide seast. Olgu t_1, t_2 ja t_3 kolme osa tõusud ning t_{12} koordinaatide alguspunkti ja teist sõlme ühendava lõigu tõus.

Väite B kehtivuseks on vajalik, et $t_2 < t_1$ ja $t_3 \leq t_{12}$. Väite A mittekehtivuseks on aga vajalik, et $t_3 > t_2$.

Neid tingimusi rahuldavad funktsioonid ilmselt leiduvad. Üks konkreetne funktsioon on näiteks selline:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & 1 \leq x < 2; \\ x/2, & 2 < x. \end{cases}$$

4. Vastus: infiimum on null ja supreemum on üks.

   Lahendus. Olgu $f \in F$ ning olgu $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineeritud kui $f^*(x) = f(x) - x$. Kui mõne $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x) = x$, siis $f(f(x)) = x \neq x + 1$. Järelikult $f(x) \neq x$ ehk $f^*(x) \neq 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Kui mõne $x \in \mathbb{R}$ ja mõne $y \in \mathbb{R}$ korral $f^*(x) < 0$ ja $f^*(y) > 0$, siis f^* pidevuse tõttu leidub $c \in \mathbb{R}$ nii, et $f^*(c) = 0$. Niisiis kas f^* on kõikjal positiivne või on f^* kõikjal negatiivne. Kui f^* on kõikjal negatiivne, siis $f(x) < x$ iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks ning seega $f(f(x)) < f(x) < x < x + 1$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Järelikult on f^* kõikjal positiivne ehk $f(x) > x$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Kui mõne $x \in \mathbb{R}$ puhul $f^*(x) \geq 1$, siis $f(f(x)) > f(x) = x + f^*(x) \geq x + 1$. Niisiis iga $x \in \mathbb{R}$ korral $f^*(x) \in (0, 1)$. Veendume järgnevas, et iga $\alpha \in (0, 1)$ puhul on olemas $f \in F$ ja $x \in \mathbb{R}$ nii, et $f(x) - x = \alpha$.

   Kirjeldame üht viisi, kuidas konstrueerida hulka F kuuluvat funktsiooni. Olgu x_0 suvaline reaalarv ning olgu $f_0^* : [x_0, x_0 + \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ suvaline pidev funktsioon, mis rahuldab tingimusi:

   (a) $f_0^*(x_0) = f_0^*(x_0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
   (b) $\forall x, y \in [x_0, x_0 + \frac{1}{2}],\ x < y : \frac{f_0^*(y) - f_0^*(x)}{y - x} > -1$.

   Defineerime funktsiooni $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ järgmisel viisil. Esiteks, kehtigu iga $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{2})$ korral $f^*(x) = f_0^*(x)$. Laiendame funktsiooni määramispiirkonna hulgani $[x_0, x_0 + 1)$. Selleks vaatleme funktsiooni $f_0 : [x_0, x_0 + \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega $f_0(x) = x + f_0^*(x)$. Kuna funktsioon f_0^* on pidev, siis pidev on ka funktsioon f_0. Kui $x, y \in [x_0, x_0 + \frac{1}{2})$ ja $x < y$, siis funktsiooni f_0^* kohta tehtud eelduste kohaselt

$$\frac{f_0^*(y) - f_0^*(x)}{y - x} > -1 \implies f_0^*(y) - f_0^*(x) > x - y \implies y + f_0^*(y) > x + f_0^*(x).$$

   Seega on funktsioon f_0 rangelt kasvav. Kuna $f_0 : [x_0, x_0 + \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$ on pidev ja rangelt kasvav ning $f_0(x_0) = x_0 + \frac{1}{2}$ ja $\lim_{x \to x_0 + \frac{1}{2}} f_0(x) = x_0 + 1$, siis f_0 on bijektsioon intervallide $[x_0, x_0 + \frac{1}{2})$ ja $[x_0 + \frac{1}{2}, x_0 + 1)$ vahel ning f_0^{-1} on pidev bijektsioon intervallist $[x_0 + \frac{1}{2}, x_0 + 1)$ intervalli $[x_0, x_0 + \frac{1}{2})$. Defineerime

nüüd iga $x \in [x_0 + \frac{1}{2}, x_0 + 1)$ korral $f^*(x) = 1 - f^*(f_0^{-1}(x))$. Paneme tähele, et $f^*|_{[x_0+\frac{1}{2}, x_0+1)}$ on pidev ning $f^*(x_0 + \frac{1}{2}) = \lim_{x \to x_0+1} f^*(x) = \frac{1}{2}$. Lõpuks laiendame funktsiooni f^* tervele reaalteljele nii, et see oleks perioodiline perioodiga 1. Tulemuseks on pidev funktsioon $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Defineerime pideva funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seosega $f(x) = x + f^*(x)$. Veendume, et see rahuldab seost $f(f(x)) = x + 1$. Teisendame selle seose:

$$f(f(x)) = x + 1 \iff f(x) + f^*(f(x)) = x + 1 \iff$$
$$x + f^*(x) + f^*(x + f^*(x)) = x + 1 \iff f^*(x) + f^*(x + f^*(x)) = 1.$$

Kuna funktsioon f^* on perioodiline perioodiga 1, siis piisab näidata võrduse $f^*(x) + f^*(x + f^*(x)) = 1$ kehtivust vaid kõigi $x \in [x_0, x_0 + 1)$ jaoks. Olgu $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{2})$ suvaline. Tähistame $y = f_0(x)$. Siis $x = f_0^{-1}(y)$ ning f^* definitsiooni järgi kehtib

$$f^*(y) = 1 - f^*(f_0^{-1}(y)) \implies f^*(f_0(x)) = 1 - f^*(x) \implies$$
$$f^*(x) + f^*(f_0(x)) = 1 \implies f^*(x) + f^*(x + f^*(x)) = 1.$$

Olgu nüüd $y \in [x_0 + \frac{1}{2}, x_0 + 1)$ suvaline. Tähistame $x = f_0^{-1}(y)$. Siis $y = f_0(x)$ ning f^* definitsiooni järgi

$$f^*(y) = 1 - f^*(f_0^{-1}(y)) \implies f^*(y) = 1 - f^*(x) \implies$$
$$y + f^*(y) = y + 1 - f^*(x) \implies y + f^*(y) = f_0(x) + 1 - f^*(x) \implies$$
$$y + f^*(y) = x + f^*(x) + 1 - f^*(x) \implies y + f^*(y) = x + 1 \implies$$
$$f^*(y + f^*(y)) = f^*(x + 1).$$

Kuna f^* on perioodiline perioodiga 1, siis saame $f^*(x+1) = f^*(x)$ ning seega

$$f^*(y) + f^*(y + f^*(y)) = f^*(y) + f^*(x) = f^*(x + f^*(x)) + f^*(x) =$$
$$f^*(x) + f^*(x + f^*(x)) = 1,$$

kus viimane võrdus kehtib sellepärast, et $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{2})$. Kokkuvõttes olemegi näidanud, et võrdus $f^*(x) + f^*(x + f^*(x)) = 1$ on tõene iga $x \in [x_0, x_0 + 1)$ ning järelikult ka iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks.

Etteantud $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ korral võime võtta $x_0 = 0$ ning defineerida funktsiooni $f_0^* : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ nii, et valime mingi $\delta' \in (0, \frac{1}{2} - \delta)$ (näiteks $\delta' = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \delta)$), defineerime $f_0^*(0) = f_0^*(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ja $f_0^*(\delta') = \frac{1}{2} + \delta$ ning laseme funktsioonil f_0^* olla lineaarne lõikudes $[0, \delta']$ ja $[\delta', \frac{1}{2}]$. Selliselt defineeritud funktsioon f_0^* on

pidev, kusjuures avaldise $\frac{f_0^*(y)-f_0^*(x)}{y-x}$ väikseim võimalik väärtus on

$$\frac{f_0^*(\frac{1}{2})-f_0^*(\delta')}{\frac{1}{2}-\delta'}=\frac{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}+\delta)}{\frac{1}{2}-\delta'}=\frac{-\delta}{\frac{1}{2}-\delta'}>\frac{-\delta}{\delta}=-1.$$

Saadud funktsioon rahuldab seega kõiki vajalikke tingimusi. Kirjeldatud konstruktsioon annab tulemuseks funktsiooni $f \in F$, mille puhul $f(\delta')-\delta' = f_0^*(\delta') = \frac{1}{2}+\delta$. Analoogiliselt võime näidata, et etteantud $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ korral leidub $f \in F$ ja $\delta' \in \mathbb{R}$ nii, et $f(\delta')-\delta' = \frac{1}{2}-\delta$. Selleks peame defineerime x_0 ja f_0^* nagu enne, asendades δ' ja $f_0^*(\delta')$ definitsioonid järgmisega: $\delta' \in (\delta, \frac{1}{2})$ (näiteks $\delta' = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\delta)$) ja $f_0^*(\delta') = \frac{1}{2}-\delta$. Avaldise $\frac{f_0^*(y)-f_0^*(x)}{y-x}$ väikseim võimalik väärtus on seejuures

$$\frac{f_0^*(\delta')-f_0^*(0)}{\delta'-0}=\frac{\frac{1}{2}-\delta-\frac{1}{2}}{\delta'}=\frac{-\delta}{\delta'}>\frac{-\delta}{\delta}=-1.$$

Kokkuvõttes olemegi näidanud, et iga $\alpha \in (0,1)$ korral leiduvad $f \in F$ ja $x \in \mathbb{R}$ nii, et $f(x)-x=\alpha$. Niisiis otsitavad infiimum ja supreemum on vastavalt null ja üks.

Märkus. Iga funktsioon $f \in F$ on saadav eespool kirjeldatud konstruktsiooni abil. Olgu $f \in F$ suvaline. Vaatleme funktsiooni $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^*(x) = f(x)-x$. Kui leiduvad $x, y \in \mathbb{R}$ nii, et $f^*(x) < \frac{1}{2}$ ja $f^*(y) > \frac{1}{2}$, siis pidevuse tõttu leidub $c \in \mathbb{R}$, mille puhul $f^*(c) = \frac{1}{2}$. Kui iga $x \in \mathbb{R}$ korral kehtiks $f^*(x) > \frac{1}{2}$, siis iga $x \in \mathbb{R}$ korral oleks $f(f(x)) = f(x)+f^*(f(x)) > f(x)+\frac{1}{2} = x+f^*(x)+\frac{1}{2} > x+1$. Analoogiliselt, kui iga $x \in \mathbb{R}$ korral kehtiks $f^*(x) < \frac{1}{2}$, siis iga $x \in \mathbb{R}$ korral oleks $f(f(x)) = f(x)+f^*(f(x)) < f(x)+\frac{1}{2} = x+f^*(x)+\frac{1}{2} < x+1$. Siit võime teha järelduse, et peab kindlasti leiduma punkt $c \in \mathbb{R}$ nii, et $f^*(c) = \frac{1}{2}$. Defineerime $x_0 = c$ ning $f_0^* = f^*|_{[x_0, x_0+\frac{1}{2}]}$. Kontrollime, et f_0^* rahuldab konstruktsioonis toodud tingimusi. Ilmselt on f_0^* pidev ning rahuldab seost $f_0^*(x_0) = \frac{1}{2}$. Seosest $f(f(x)) = x+1$ saame võrduse $f^*(x)+f^*(x+f^*(x)) = 1$. Pannes x asemele x_0, saame $f^*(x_0+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Kui leiduvad $x, y \in [x_0, x_0+\frac{1}{2}]$ nii, et $x < y$ ja $\frac{f^*(y)-f^*(x)}{y-x} = -1$, siis $x+f^*(x) = y+f^*(y)$ ehk $f(x) = f(y)$, millest $f(f(x)) = f(f(y))$ ehk $x+1 = y+1$, mis läheb vastuollu eeldusega $x < y$. Oletame, et leiduvad $x, y \in [x_0, x_0+\frac{1}{2}]$ nii, et $x < y$ ja $\frac{f^*(y)-f^*(x)}{y-x} < -1$. Vaatleme funktsiooni $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$\alpha(\lambda)=\frac{f^*\Big((1-\lambda)y+\lambda(x_0+\frac{1}{2})\Big)-f^*\Big((1-\lambda)x+\lambda x_0\Big)}{(1-\lambda)y+\lambda(x_0+\frac{1}{2})-(1-\lambda)x-\lambda x_0}.$$

Kuna iga $\lambda \in [0,1]$ korral on viimase murru nimetaja positiivne, siis definitsioon on korrektne ning tegemist on pideva funktsiooniga. Kuna $\alpha(0) = \frac{f^*(y)-f^*(x)}{y-x} < -1$ ning $\alpha(1) = 0 > -1$, siis pidevuse tõttu peab leiduma $\lambda \in (0,1)$ nii, et $\alpha(\lambda) = -1$, mis läheb aga eelnevaga vastuollu. Kokkuvõttes

oleme näidanud, et $\frac{f^*(y)-f^*(x)}{y-x} > -1$, kui $x, y \in [x_0, x_0 + \frac{1}{2}]$ ja $x < y$. Sellega oleme veendunud, et f_0^* rahuldab kõiki nõutud tingimusi. On jäänud veenduda, et konstruktsiooni tulemuseks olev funktsioon klapib funktsiooniga f.

5. Vastus: 2^{2n-2}.

   Lahendus. Tähistagu M^* hulga M alamhulka, mis koosneb parajasti sellistest maatriksitest, mille kõik nullist erinevad elemendid asuvad kas esimeses veerus või esimeses reas, aga mitte esimese rea viimases lahtris. Maatriksi $X \in M$ korral tähistagu $[X]_\sim$ selle ekvivalentsiklassi. Tähistagu $M/\sim$ faktorhulka ehk kõigi ekvivalentsiklasside hulka.

   Paneme tähele, et $A, B \in M$ puhul kehtib $A \sim B$ parajasti siis, kui leidub hulga P selline alamhulk S, et $B = A + \sum_{X \in S} X$.

   Paneme tähele, et hulka M^* kuuluvate maatriksite puhul on täpselt $2n-2$ kohta, kus võivad asuda nii nullid kui ühed (n kohta esimeses veerus ja veel $n-2$ kohta esimeses reas). Seega on hulga M^* elementide arv ilmselt 2^{2n-2}. Kui näitame, et seos $X \mapsto [X]_\sim$ defineerib bijektsiooni hulgast M^* hulka $M/\sim$, siis saame järeldada, et ka hulga $M/\sim$ elementide arv on 2^{n-2}.

   Tõestame injektiivsuse. Olgu $X_1, X_2 \in M^*$ ja olgu $X_1 \sim X_2$. Peame näitama, et $X_1 = X_2$. Kuna $X_1 \sim X_2$, siis $X_2 = X_1 + \sum_{X \in S} X$, kus S on hulga P mingi alamhulk. Kuna maatriksite X_1 ja X_2 viimastes veergudes on nullid, siis hulga S elementide arv peab olema paaris. Kuna $|S|$ on paaris ja maatriksite X_1 ja X_2 veergudes $2, \ldots, n-1$ on nullid alates teisest reast, siis maatriksi X_1 esimese rea elemendid $2, \ldots, n-1$ peavad olema samad mis maatriksis X_2. Analoogiliselt saame, et maatriksi X_1 esimese veeru elemendid $2, \ldots, n$ peavad olema samad mis maatriksis X_2. Seega võivad maatriksid X_1 ja X_2 erineda üksnes esimese veeru esimese rea elemendis. Kuna aga $|S|$ on paaris, siis peab ka see element kahes maatriksis sama olema. Niisiis tõepoolest $X_1 = X_2$.

   Enne sürjektiivsuse näitamist tõestame ühe abitulemuse. Olgu $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < i_2$, $j_1 < j_2$. Tähistagu $N(i_1, i_2, j_1, j_2) \in M$ maatriksit, millel on ühed lahtrites (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_1), (i_2, j_2) ja nullid ülejäänud kohtades. Näitame, et iga $A \in M$ puhul $A \sim A + N(i_1, i_2, j_1, j_2)$. Piisab näidata, et $N(i_1, i_2, j_1, j_2)$ esitub hulka P kuuluvate maatriksite summana. Olgu σ_0 mingi bijektsioon hulgast $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$ hulka $\{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2\}$. Defineerime bijektsioonid $\sigma, \sigma' : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ seostega $\sigma(i_1) = j_1$, $\sigma(i_2) = j_2$, $\sigma'(i_1) = j_2$, $\sigma'(i_2) = j_1$ ja seosega $\sigma(i) = \sigma'(i) = \sigma_0(i)$ juhul $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$. Olgu S maatriks, millel on ühed lahtrites $(i, \sigma(i))$, kus $i \in \{1, \ldots, n\}$, ja nullid ülejäänud kohtades. Olgu S' analoogiline maatriks permutatsiooni σ' jaoks. Paneme tähele, et $S, S' \in P$ ja $N(i_1, i_2, j_1, j_2) = S + S'$.

Tõestame nüüd, et funktsioon on ka sürjektiivne. Olgu $Y \in M$ suvaline. Peame näitama, et leidub selline $X \in M^*$, et $X \sim Y$. Teeme seda nii, et asendame maatriksit Y mõne ekvivalentse maatriksiga ning kordame operatsiooni seni, kuni jõuame maatriksini hulgast M^*.

Kui maatriksi Y viimases veerus on paaritu arv ühtesid, siis liidame maatriksile Y suvalise maatriksi hulgast P. Nüüd on maatriksi Y viimases veerus paaris arv ühtesid. Kui viimases veerus ei ole ühtegi ühte, siis liigume kohe järgmise sammu juurde. Vastasel juhul jaotame vastavate ridade indeksid paarideks $(i_1, i'_1), \ldots, (i_k, i'_k)$ ja liidame maatriksi Y juurde järjest maatriksid $N(i_1, i'_1, 1, n), \ldots, N(i_k, i'_k, 1, n)$. Nüüd on maatriksi Y viimases veerus ainult nullid. Vaatleme kõiki paare (i, j), mille puhul $i \in \{2, \ldots, n\}$, $j \in \{2, \ldots, n-1\}$ ja $Y_{ij} = 1$. Iga sellise paari (i, j) jaoks liidame maatriksile Y maatriksi $N(1, i, 1, j)$. Kui oleme lõpetanud, on tulemuseks maatriks hulgast M^*.