Tartu Ülikooli matemaatikavõistlus

Tartu, 14.03.2026

Ülesanded

1. Olgu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rangelt kasvav positiivsete täisarvude jada. Vaatleme järgmisi väiteid:

   A) rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ koondub;

   B) jada $\left(\frac{n}{a_{n+1}-a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ on tõkestatud.

   Kas väitest A järeldub väide B? Kas väitest B järeldub väide A?

2. Abel ja Banach elavad samas külas. Selle küla igal elanikul on täpselt k sõpra teiste selle küla elanike seast. Abel ja Banach pole sõbrad ning neil pole ka ühtegi ühist sõpra küla ülejäänud elanike seast. Leida vaadeldava küla elanike arvu kõik võimalikud väärtused.

3. Olgu A reaalarv ning olgu $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellised diferentseeruvad funktsioonid, et
$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} \beta(t) = \infty$$
   ning funktsioonid $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ on kogu reaalteljel positiivsed. Tõestada, et kui
$$\lim_{t\to\infty} \Big(\ln\big(\alpha(t)\alpha'(t)\big) - \ln\big(\beta(t)\beta'(t)\big) \Big) = A,$$
   siis
$$\lim_{t\to\infty} \Big(\ln\big(\alpha(t)/\alpha'(t)\big) - \ln\big(\beta(t)/\beta'(t)\big) \Big) = 0.$$

4. Olgu $a_0 = 1$ ja $b_0 = 3$. Iga $n \geq 1$ korral kehtigu
$$a_n = \frac{(n^2+4n+2)a_{n-1} + 2b_{n-1}}{n^2+4n+3}, \quad b_n = \frac{(n^2+4n+2)b_{n-1} + 2a_{n-1}}{n^2+4n+3}.$$
   Leida piirväärtused $\lim_n a_n$ ja $\lim_n b_n$.

5. Olgu n positiivne täisarv. Leida sellised täisarvud $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k k^{\alpha} = (n+1)^{\alpha}$$
   iga $\alpha = 1, \ldots, n$ korral, või näidata, et selliseid täisarve ei leidu.

Lahendused

1. Näitame, et väitest B järeldub väide A. Olgu $K = \sup\{\frac{n}{a_{n+1}-a_n} : n \geq 1\}$ ning olgu N mingi positiivne täisarv. Kuna iga indeksi $n = 1, \ldots, N$ korral kehtib $n \leq K(a_{n+1} - a_n)$, siis summerides antud seosed saame

$$\frac{N(N+1)}{2} \leq K(a_{N+1} - a_1) \implies \frac{N(N+1)}{2} + Ka_1 \leq Ka_{N+1} \implies$$
$$\frac{N(N+1)}{2K} + a_1 \leq a_{N+1} \implies \frac{1}{a_{N+1}} \leq \frac{2K}{N^2 + N + 2Ka_1} < \frac{2K}{N^2}.$$

Kuna rida $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2}$ koondub, siis koondub ka rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

Pöördväide ei kehti. Kontranäiteks sobib jada

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1^2,\ 1^2 + 1,\ 2^2,\ 2^2 + 1,\ 3^2,\ 3^2 + 1, \ldots).$$

Selle jada puhul

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty,$$

kuid iga paaritu n korral $a_{n+1} - a_n = 1$, mistõttu $\frac{n}{a_{n+1}-a_n} = n$, seega jada $\left(\frac{n}{a_{n+1}-a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ pole tõkestatud.

2. Olgu küla elanike arv n. Kuna Abelil ja Banachil on kummalgi k sõpra ning ühiseid sõpru Abelil ja Banachil ei ole, siis $n \geq 2k + 2$.

Vaatleme juhtu, kus k on paaris. Näitame, et sellisel juhul võib n olla iga täisarv, mis ei ole väiksem kui $2k+2$. Vaatleme küla, milles on vähemalt $2k+2$ maja, kusjuures igas majas elab üks inimene ning majad asetsevad ühel ringil võrdsete vahemaade tagant. Olgu iga inimene sõber tema k lähima naabriga: $k/2$ naabrit ühele poole ja $k/2$ naabrit teisele poole. Kui me võtame kaks inimest, kelle majade vahele jääb k maja, siis need pole üksteisega sõbrad ega oma ühtegi ühist sõpra (sellised inimesed leiduvad tänu eeldusele, et külas on vähemalt $2k + 2$ elanikku).

Olgu nüüd k paaritu, siis $k = 2l + 1$, kus l on mingi mittenegatiivne täisarv. Kuna iga inimene omab k sõpra, siis külas on täpselt $nk/2$ sõprussuhet. Siit järeldub, et n peab olema paaris. Näitame, et n tohib olla iga paaris täisarv, mis ei ole väiksem kui $2k + 2$. Vaatleme samasugust küla nagu eelmises näites. Olgu elanike arv nüüd paaris. Olgu iga inimene X sõber temaga vastatikku elava inimesega Y (olemas, sest elanike arv on paaris) ning iga inimesega, kes elab $2i$ sammu kaugusel inimesest Y, kus i on täisarv ja $|i| \leq l$. Kuna kaugus inimesest X temaga vastatikku elava inimeseni Y on vähemalt $\frac{2k+2}{2} = k+1 = 2l+2$, siis elaniku X sõbrad asuvad temast vähemalt

$2l+2-2l=2$ sammu kaugusel. Seega kui me võtame kaks inimest, kes elavad üksteise kõrval, siis need pole üksteisega sõbrad. On lihtne näha, et need ei oma ka ühtegi ühist sõpra.

3. Tingimuse
$$\lim_{t\to\infty}\Big(\ln\left(\alpha\alpha'\right)-\ln\left(\beta\beta'\right)\Big)=A,$$
võime teisendada kujule
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'}=e^A,$$
Paneme tähele, et $\alpha\alpha'=(\frac{1}{2}\alpha^2)'$ ning $\beta\beta'=(\frac{1}{2}\beta^2)'$. Kuna $\beta\to\infty$, siis ka $\frac{1}{2}\beta^2\to\infty$. Kuna β ja β' on positiivsed, siis on positiivne ka $(\frac{1}{2}\beta^2)'$. L'Hôpitali reegli kohaselt peab seega kehtima
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha^2}{\beta^2}=e^A.$$
Pannes kokku viimased kaks piirväärtust, saame
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha\beta'}{\beta\alpha'}=1,$$
millest
$$\lim_{t\to\infty}\Big(\ln\left(\alpha/\alpha'\right)-\ln\left(\beta/\beta'\right)\Big)=0.$$

4. Paneme tähele, et võime esitada vaadeldavad seosed kujul
$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{n^2+4n+3}\begin{pmatrix}n^2+4n+2 & 2\\ 2 & n^2+4n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}.$$
Kuna $(1,1)$ ja $(-1,1)$ on saadud maatriksi omavektorid, siis me võime selle diagonaliseerida:
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}n^2+4n+2 & 2\\ 2 & n^2+4n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n^2+4n+2 & 2\\ 2 & n^2+4n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n^2+4n+4 & -n^2-4n\\ n^2+4n+4 & n^2+4n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n^2+4n+4 & 0\\ 0 & n^2+4n\end{pmatrix}.$$
Seega
$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} & 0\\ 0 & \frac{n^2+4n}{n^2+4n+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}$$

ning

$$\begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_N & 0 \\ 0 & v_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

kus

$$u_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}, \quad v_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{n^2+4n}{n^2+4n+3}.$$

Siit saame

$$\begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_N+v_N & u_N-v_N \\ u_N-v_N & u_N+v_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

ning

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{1}{2}\Big(a_0(u_N+v_N)+b_0(u_N-v_N)\Big), \\ b_N &= \frac{1}{2}\Big(a_0(u_N-v_N)+b_0(u_N+v_N)\Big). \end{aligned}$$

Teisendame korrutised u_N ja v_N ning leiame nende piirväärtused:

$$\begin{aligned} u_N &= \prod_{n=1}^{N} \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} = \prod_{n=1}^{N} \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{n+2}{n+1} \cdot \prod_{n=1}^{N} \frac{n+2}{n+3} = \\ &= \frac{N+2}{2} \cdot \frac{3}{N+3} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{3}{2}, \\ v_N &= \prod_{n=1}^{N} \frac{n^2+4n}{n^2+4n+3} = \prod_{n=1}^{N} \frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{n}{n+1} \cdot \prod_{n=1}^{N} \frac{n+4}{n+3} = \\ &= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{N+4}{4} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Niisiis saame lõpuks

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} a_N &= \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{7}{4} + 3 \cdot \frac{5}{4}\right) = \frac{11}{4}, \\ \lim_{N\to\infty} b_N &= \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{7}{4}\right) = \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

5. *Lahendus 1.* Otsitavad täisarvud peavad rahuldama lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{pmatrix} 1^1 & 2^1 & \cdots & n^1 \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^n & 2^n & \cdots & n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)^1 \\ (n+1)^2 \\ \vdots \\ (n+1)^n \end{pmatrix}.$$

Antud lineaarvõrrandisüsteemi süsteemimaatriks on Vandermonde maatriks

$$\begin{pmatrix} 1^0 & 2^0 & \cdots & n^0 \\ 1^1 & 2^1 & \cdots & n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix},$$

mille veerud on korrutatud läbi vastavalt arvudega $1, \ldots, n$. Vaadeldava Vandermonde maatriksi determinant on

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (j - i)$$

ning vaadeldava süsteemimaatriksi determinant on seega

$$n! \prod_{1 \le i < j \le n} (j - i),$$

mis on nullist erinev. Süsteemil leiduvad seega üheselt määratud ratsionaalararvulised lahendid, mis on antud ette Crameri valemitega $\lambda_k = \det A_k / \det A$, kus A on süsteemimaatriks ning A_k süsteemimaatriks, mille k-s veerg on asendatud vabaliikmete veeruga. Analoogiliselt maatriksiga A, maatriksi A_k determinant on

$$n! \frac{n+1}{k} \prod_{1 \le i < j \le n} (j - i) \prod_{1 \le i < k} \frac{n+1-i}{k-i} \prod_{k < j \le n} \frac{j-n-1}{j-k}$$

ning seega

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{n+1}{k} \prod_{1 \le i < k} \frac{n+1-i}{k-i} \prod_{k < j \le n} \frac{j-n-1}{j-k} = \\ &= \frac{n+1}{k} \prod_{1 \le i < k} \frac{n+1-i}{k-i} (-1)^{n-k} \prod_{k < j \le n} \frac{n+1-j}{j-k} = \\ &= (-1)^{n-k} \frac{(n+1)!}{k(n+1-k)} \prod_{1 \le i < k} \frac{1}{k-i} \prod_{k < j \le n} \frac{1}{j-k} = \\ &= (-1)^{n-k} \frac{(n+1)!}{k(n+1-k)} \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{(n-k)!} = (-1)^{n-k} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k}, \end{aligned}$$

mis on täisarv. Niisiis saame valemi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} k^\alpha = (n+1)^\alpha,$$

mis kehtib iga $\alpha = 1, \dots, n$ korral.

Lahendus 2. Alustame suvalise reaalarvu x jaoks kehtivast seosest

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} x^k = (x-1)^{n+1}.$$

Diferentseerime võrduse mõlemad pooled ja korrutame mõlemad pooled x-ga α korda (diferentseerime, korrutame, diferentseerime, korrutame...) ning paneme lõpus $x = 1$. Kuna $\alpha \le n$ ning paremas pooles on $x - 1$ astendaja suurem kui n, siis paremas pooles saame tulemuseks nulli. Vasakus pooles kaob indeksile $k = 0$ vastav liige esimese diferentseerimisega juba ära. Tulemuseks saame seega

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} k^\alpha = 0.$$

Viime vasakus pooles oleva summa viimase liikme paremale poole ning korrutame võrduse mõlemad pooled (-1)-ga:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k} k^\alpha = (n+1)^\alpha.$$

Siit näeme, et sobib võtta $\lambda_k = (-1)^{n-k}\binom{n+1}{k}$. Näeme, et tegemist on täisarvuga.