

Tartu Ülikooli matemaatikavõistlus

Tartu, 15.11.2025

Ülesanded

1. Leida vähim paaritu naturaalarv, mis jagub 27-ga ja oma positiivsete jagajate arvuga.

2. Teha kindlaks, kas järgmine rida koondub:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^3 - n + 1}{n + 1}}.$$

3. Olgu $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Leida piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{1}{n}i}^{\frac{1}{n}(i+1)} f(x) dx - \int_{\frac{1}{n}j}^{\frac{1}{n}(j+1)} f(x) dx \right)^2.$$

4. Tähistame $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Nimetame funktsiooni $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sublineaarseks, kui $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Kas vastab tõele, et iga mittekahaneva sublineaarse funktsiooni $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ korral leidub selline mittekahanev sublineaarne funktsioon $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, et $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in \mathbb{R}^+$ korral ning

$$g((1 - \lambda)x + \lambda x') \geq (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(x')$$

kui $x, x' \in \mathbb{R}^+$ ja $\lambda \in [0, 1]$?

5. Olgu $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ selline, et

$$A^2 = (\det A - 1)A + (\text{tr } A - 1)E.$$

Leida $\text{tr } A$ kõik võimalikud väärtused.

Lahendused

1. Kanoonilisel kujul esitatud naturaalarvu $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ positiivsete jagajate arv on teatavasti $(\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$. Kuna otsitav arv on paaritu ning jagub oma positiivsete jagajate arvuga, siis selle arvu positiivsete jagajate arv peab samuti paaritu olema. Seega peavad korrutise $(\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$ kõik tegurid olema samuti paaritud ehk siis kõik astendajad $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ peavad olema paaris. Kuna otsitav arv jagub 27-ga, siis algarvu 3 astendaja peab olema vähemalt kolm, eelmist tähelepanekut arvesse võttes vähemalt neli.

Vaatleme juhtu, kus kolme astendaja ongi täpselt neli. Siis on vastav tegur korrutises $(\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$ võrdne viiega ja järelikult peab otsitav arv viiega jaguma. Eelneva põhjal peab algarvu 5 astendaja olema seega vähemalt kaks. Vähim sobiv arv on seega $3^4 \cdot 5^2$. See arv on paaritu ja jagub 27-ga. Tema positiivsete jagajate arv on $5 \cdot 3$ ja seega jagab vaadeldavat arvu ennast. Niisiis rahuldab arv $3^4 \cdot 5^2 = 2025$ kõiki soovitud tingimusi.

Vaatleme nüüd juhtu, kus kolme astendaja on kuus. Sellisel juhul peab otsitav arv n seitsmega jaguma, millest aga tuleneb, et $n \geq 3^6 \cdot 7 = 729 \cdot 7 > 700 \cdot 7 = 4900 > 2025$.

Kui aga kolme astendaja on vähemalt kaheksa, siis $n \geq 3^8 = 3^6 \cdot 9 = 729 \cdot 9 > 700 \cdot 9 = 6300 > 2025$.

Kokkuvõttes saame, et vähim soovitud tingimusi rahuldav naturaalarv on $3^4 \cdot 5^2 = 2025$.

2. Tähistame

$$a_n = \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^3 - n + 1}{n + 1}}.$$

Proovime rakendada Cauchy tunnust. Selleks teisendame avaldise $\sqrt[n]{a_n}$:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^3 - n + 1}{n + 1}}} = \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^3 - n + 1}{n(n + 1)}} = \\ &= \left(1 - \frac{n}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^3 - n + 1}{n(n + 1)}} = \left(1 - \frac{n}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^2 + 1}{n} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \frac{n^3 - n + 1}{n(n + 1)}} = \\ &= \left(\left(1 - \frac{n}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^2 + 1}{n}} \right)^{\frac{n^3 - n + 1}{(n^2 + 1)(n + 1)}}. \end{aligned}$$

Kuna $\frac{n^2 + 1}{n} \rightarrow \infty$ kui $n \rightarrow \infty$ ning $\left(1 - \frac{1}{k} \right)^k \rightarrow e^{-1}$ kui $k \rightarrow \infty$, siis

$$\left(1 - \frac{n}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^2 + 1}{n}} \rightarrow e^{-1}$$

kui $n \rightarrow \infty$. Kuna samas protsessis ka $\frac{n^3-n+1}{(n^2+1)(n+1)} \rightarrow 1$, siis saame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1} < 1,$$

järelikult rida koondub.

3. Täisarvude $n \geq 1$ ja $i \in [0, n-1]$ korral tähistagu $I_{n,i}$ integraali $\int_{\frac{1}{n}i}^{\frac{1}{n}(i+1)} f(x)dx$ ning $c_{n,i}$ sellist punkti lõigus $[\frac{1}{n}i, \frac{1}{n}(i+1)]$, et $\frac{1}{n}c_{n,i} = I_{n,i}$ (integraali keskvaar-tusteoreem). Teisendame uuritava avaldise:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (I_{n,i} - I_{n,j})^2 &= 2 \sum_{i,j} (i < j) (I_{n,i} - I_{n,j})^2 = \\ &2 \left((n-1) \sum_i I_{n,i}^2 - 2 \sum_{i,j} (i < j) I_{n,i} I_{n,j} \right) = \\ &2 \left(n \sum_i I_{n,i}^2 - \sum_i I_{n,i}^2 - 2 \sum_{i,j} (i < j) I_{n,i} I_{n,j} \right) = 2 \left(n \sum_i I_{n,i}^2 - (\sum_i I_{n,i})^2 \right) = \\ &2 \left(n \sum_i (\frac{1}{n}c_{n,i})^2 - (\int_0^1 f(x)dx)^2 \right) = 2 \left(\sum_i \frac{1}{n}c_{n,i}^2 - (\int_0^1 f(x)dx)^2 \right). \end{aligned}$$

Kuna f^2 on Riemanni mõttes integreeruv, siis $\sum_i \frac{1}{n}c_{n,i}^2 \rightarrow \int_0^1 f(x)^2 dx$ kui $n \rightarrow \infty$. Seega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} (I_{n,i} - I_{n,j})^2 = 2 \left(\int_0^1 f(x)^2 dx - (\int_0^1 f(x)dx)^2 \right).$$

4. Jah, sellise funktsiooni saab defineerida seosega

$$g(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \text{conv } A\},$$

kus $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\}$.

Näeme, et suvalise $x \in \mathbb{R}^+$ puhul $(x, f(x)) \in A \subseteq \text{conv } A$, millest saame $f(x) \leq g(x)$. Veendume, et funktsioon g rahuldab ka teisi nõutud tingimusi.

Olgu a suvaline positiivne reaalarv. Kuna $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, siis leidub $P_a \in \mathbb{R}^+$ nii, et iga reaalarvu $x \geq P_a$ korral $\frac{f(x)}{x} \leq a$ ehk $f(x) \leq ax$. Siis iga $x \in (0, P_a)$ korral $f(x) \leq f(P_a) \leq aP_a < a(x + P_a)$ ning iga $x \in [P_a, \infty)$ korral $f(x) \leq ax < a(x + P_a)$ ehk kokkuvõttes $f(x) < a(x + P_a)$ iga $x \in \mathbb{R}^+$ korral. Tähistame $A_a^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : y \leq a(x + P_a)\}$. Siis $A \subseteq A_a^*$. Kuna hulk A_a^* on kumer, siis kehtib ka $\text{conv } A \subseteq A_a^*$. Siit järeldub, et iga $x \in \mathbb{R}^+$ korral kehtib $g(x) \leq a(x + P_a)$ (millest omakorda järeldub, et $g(x)$ on iga $x \in \mathbb{R}^+$ korral kindlasti lõplik).

Veendume, et tegemist on sublineaarse funktsiooniga. Olgu ε suvaline positiivne reaalarv. Peame näitama, et leidub $P \in \mathbb{R}^+$ nii, et iga reaalarvu $x \geq P$ korral $|\frac{g(x)}{x}| \leq \varepsilon$. Defineerime $a = \frac{\varepsilon}{2}$. Eelneva põhjal teame, et iga $x \in \mathbb{R}^+$ korral $g(x) \leq a(x + P_a)$. Kui nüüd $x \geq P_a$, siis $g(x) \leq 2ax = \varepsilon x$ ehk $\frac{g(x)}{x} \leq \varepsilon$. Teiselt poolt, kuna f on mittekahanev, siis leidub selline $P' \in \mathbb{R}^+$, et

$f(x) \geq -\varepsilon x$ kui $x \geq P'$. Niisiis iga reaalarvu $x \geq P'$ korral $\frac{g(x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq -\varepsilon$. Kui nüüd $P = \max\{P_a, P'\}$, siis iga reaalarvu $x \geq P$ korral kehtib $|\frac{g(x)}{x}| \leq \varepsilon$. Sellega oleme näidanud, et g on tõepoolest sublineaarne.

Olgu $x, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ suvalised. Ülemise raja definitsioonist tuleneb, et leidub $y \in \mathbb{R}$ nii, et $(x, y) \in \text{conv } A$ ja $y > g(x) - \varepsilon$. Kuna $(x, y) \in \text{conv } A$, siis leiduvad $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in A$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ nii, et

$$(x, y) = \lambda_1(x_1, y_1) + \dots + \lambda_n(x_n, y_n)$$

ja $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Olgu indeks i selline, et $x_i = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. On selge, et $x_i \geq x$. Samuti on selge, et peab leiduma selline indeks j , et $y_j \geq y$. Kuna $x_j \leq x_i$ ja f on mittekahanev, siis $f(x_j) \leq f(x_i)$. Niisiis $y \leq y_j \leq f(x_j) \leq f(x_i)$. Olgu nüüd $x' > x$ suvaline. Veendume, et $g(x') \geq y$. Kui $x' \geq x_i$, siis näeme, et tõepoolest

$$g(x') \geq f(x') \geq f(x_i) \geq y.$$

Vaatleme nüüd juhtu $x' < x_i$. Olgu $\lambda \in (0, 1)$ selline, et $x' = (1 - \lambda)x + \lambda x_i$. Kuna punktid (x, y) ja $(x_i, f(x_i))$ kuuluvad hulka $\text{conv } A$ ning hulk $\text{conv } A$ on kumer, siis $(1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x_i, f(x_i)) \in \text{conv } A$. Siit järeldeb, et

$$g(x') \geq (1 - \lambda)y + \lambda f(x_i) \geq (1 - \lambda)y + \lambda y = y.$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et iga $x' > x$ korral kehtib $g(x') \geq y > g(x) - \varepsilon$. Kuna saadud tulemus kehtib iga $\varepsilon > 0$ korral, siis saame järeldada, et $g(x') \geq g(x)$. Sellega oleme näidanud, et funktsioon g on mittekahanev.

On jäänud näidata, et g on nõgus. Olgu $x, x' \in \mathbb{R}^+$ ja $\lambda \in [0, 1]$ suvalised. Olgu ε suvaline positiivne reaalarv. Ülemise raja definitsioonist tuleneb, et leiduvad $y, y' \in \mathbb{R}$ nii, et $(x, y), (x, y') \in \text{conv } A$ ning $y > g(x) - \varepsilon$ ja $y' > g(x') - \varepsilon$. Kuna $(x, y), (x, y') \in \text{conv } A$ ja $\text{conv } A$ on kumer hulk, siis $(1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') \in \text{conv } A$, millest

$$g((1 - \lambda)x + \lambda x') \geq (1 - \lambda)y + \lambda y' > (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(x') - \varepsilon.$$

Kuna saadud võrratus kehtib iga $\varepsilon > 0$ korral, siis oleme nõgususe tõestanud.

- Polünoomi $p = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, kus n on positiivne täisarv ja $a_n \neq 0$, nimetatakse matriksi A annulleerivaks polünoomiks kui $p(A) = 0$ ehk $a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E = 0$. Matriksi A vähima võimaliku astmega unitaarset annulleerivat polünoomi nimetatakse matriksi A minimaalseks polünoomiks. Matriksi minimaalne polünoom on üheselt määratud. Ülesandes antud

võrdusest $A^2 = (\det A - 1)A + (\operatorname{tr} A - 1)E$ järel, et

$$g = X^2 - (\det A - 1)X - (\operatorname{tr} A - 1)$$

on matriksi A annulleeriv polünoom. Seega on matriksi A minimaalse polünoomi aste kas 1 või 2.

Kui minimaalse polünoomi aste on 1, siis leidub $\lambda \in \mathbb{C}$ nii, et $A = \lambda E$. Sellisel juhul $\det A = \lambda^2$ ja $\operatorname{tr} A = 2\lambda$ ning

$$\begin{aligned} g(A) = 0 &\iff \lambda^2 - (\lambda^2 - 1)\lambda - (2\lambda - 1) = 0 \iff \\ &-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \iff (\lambda^2 + 1)(-\lambda + 1) = 0 \iff \lambda \in \{1, i, -i\}. \end{aligned}$$

Siit saame $\operatorname{tr} A$ jaoks väärtused 2, $2i$ ja $-2i$.

Vaatleme nüüd juhtu, kus minimaalse polünoomi aste on 2. Sellisel juhul on nii g kui ka matriksi A karakteristlik polünoom

$$p_A = X^2 + (-\operatorname{tr} A)X + \det A$$

võrdsed matriksi A minimaalse polünoomiga (Cayley-Hamiltoni teoreemi kohaselt on karakteristlik polünoom annulleeriv). Siit saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} -\det A + 1 = -\operatorname{tr} A \\ -\operatorname{tr} A + 1 = \det A \end{cases},$$

millest $\operatorname{tr} A = 0$ ja $\det A = 1$. Tingimusi $\operatorname{tr} A = 0$ ja $\det A = 1$ rahuldavaid matrikseid $A \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$ leidub. Üks selline on näiteks

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

kõik teised esituvad kujul $T^{-1}AT$, kus $T \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$ on pööratav. On selge, et iga tingimusi $\operatorname{tr} A = 0$ ja $\det A = 1$ rahuldava matriksi $A \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$ puhul kehtib $g(A) = 0$ (see järel, et $g = p_A$ ja $p_A(A) = 0$).

Kokkuvõttes saame, et $\operatorname{tr} A$ võimalikud väärtused on 0, 2, $2i$ ja $-2i$.