Tartu Ülikooli matemaatikavõistlus

Tartu, 15.03.2025

Ülesanded

1. Olgu $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Kas leidub selline punkt $x \in [0, 1]$, et
$$f(x) + \int_0^2 f(t)dt = f(x+1) + 2\int_0^1 f(t)dt?$$

2. Arvutage rea
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+2)!}$$
summa.

3. Olgu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ kaks sellist positiivsete reaalarvude jada, et $a_n \geq 1/n$ ning eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Mida saame öelda piirväärtuse
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}$$
kohta?

4. Olgu $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineerime
$$f(n) = \max\{s_1 \cdot \ldots \cdot s_k \mid k \in \mathbb{N}; s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}; s_1 + \ldots + s_k = n\}.$$
Määrake $f(n)$ väärtus iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks.

5. Olgu $n \geq 2$ täisarv ning olgu antud $n \times n$ reaalarvuline maatriks $A = (a_{ij})$ ja mittenegatiivne täisarv $k < n - 1$. Tõestage, et kui leiduvad reaalarvud $x_1, \ldots, x_n$ ja $y_1, \ldots, y_n$ nii, et $a_{ij} = (x_i + y_j)^k$ kõigi $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ korral, siis maatriks A on singulaarne.

Lahendused

1. Jah, leidub. Iga $x \in [0,2]$ korral tähistame $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Nüüd olgu $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ funktsioon, mis on antud seosega $d(x) = F(x+1) - F(x)$. Paneme tähele, et funktsioon d on diferentseeruv ning $x \in [0,1]$ korral $d'(x) = f(x+1) - f(x)$. Rakendame funktsioonile d lõigus $[0,1]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi. Saame mingi punkti $x \in (0,1)$ nii, et $d'(x) = d(1) - d(0)$. Paneme tähele, et vasakul pool on $f(x+1) - f(x)$ ja paremal pool
$$F(2)-F(1)-(F(1)-F(0)) = F(2)-2F(1)+F(0) = \int_0^2 f(t)dt - 2\int_0^1 f(t)dt.$$
Saadud seoses liikmeid ühest poolest teise ümber tõstes saame seega tõestatava võrduse.

2. Teisendame summamärgi all olevat avaldist:
$$\frac{n^2+3n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+1)(n+2)-1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!-n!}{n!(n+2)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$
Iga positiivse täisarvu N korral seega
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} \\ &= 2 - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!},\end{aligned}$$
mistõttu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!} = \lim_{N\to\infty}\left(2 - \frac{1}{(N+1)!} - \frac{1}{(N+2)!}\right) = 2.$$

3. Tähistame $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Näitame, et
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n} = L.$$
Olgu ε suvaline positiivne reaalarv. Koondumise $a_n/b_n \to L$ tõttu leidub indeks N nii, et $a_n/b_n \le L + \varepsilon/2$ kui $n \ge N$. Siis aga iga $n \ge N$ korral
$$\frac{a_N+\ldots+a_n}{b_N+\ldots+b_n} \le \frac{(L+\varepsilon/2)b_N + \ldots + (L+\varepsilon/2)b_n}{b_N+\ldots+b_n} = L + \varepsilon/2$$
ning
$$\begin{aligned}\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n} &\le \frac{a_1+\ldots+a_n}{b_N+\ldots+b_n} = \frac{a_N+\ldots+a_n}{b_N+\ldots+b_n}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_n}{a_N+\ldots+a_n} \\ &\le (L+\varepsilon/2)\frac{(a_1+\ldots+a_{N-1}) + a_N + \ldots + a_n}{a_N+\ldots+a_n}.\end{aligned}$$
Kuna $a_n \ge 1/n$, siis rida $\sum_n a_n$ hajub, mistõttu $\lim_{n\to\infty}(a_N+\ldots+a_n) = \infty$ ja seega
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_1+\ldots+a_{N-1}) + a_N + \ldots + a_n}{a_N+\ldots+a_n} = 1.$$

Niisiis leidub indeks $N^* \geq N$ nii, et $n \geq N^*$ korral

$$\frac{(a_1 + \ldots + a_{N-1}) + a_N + \ldots + a_n}{a_N + \ldots + a_n} \leq \frac{L+\varepsilon}{L+\varepsilon/2}.$$

Iga $n \geq N^*$ korral seega $\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n} \leq L + \varepsilon$.

Juhu $L = 0$ jaoks on väide tõestatud. Juhu $L > 0$ korral peame veel näitama, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub mingi indeks, millest alates $\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n} \geq L - \varepsilon$. Üldisust kitsendamata eeldame, et $\varepsilon < L$. Analoogiliselt eelmisega leidub indeks N nii, et $a_n/b_n \geq L - \varepsilon/2$ kui $n \geq N$. Siis aga iga $n \geq N$ korral

$$\frac{a_N + \ldots + a_n}{b_N + \ldots + b_n} \geq \frac{(L-\varepsilon/2)b_N + \ldots + (L-\varepsilon/2)b_n}{b_N + \ldots + b_n} = L - \varepsilon/2$$

ning

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} &\geq \frac{a_N + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} = \frac{a_N + \ldots + a_n}{b_N + \ldots + b_n} \cdot \frac{b_N + \ldots + b_n}{b_1 + \ldots + b_n} \\ &\geq (L-\varepsilon/2)\frac{b_N + \ldots + b_n}{(b_1 + \ldots + b_{N-1}) + b_N + \ldots + b_n}.\end{aligned}$$

Kuna rida $\sum_n a_n$ hajub ning leidub lõplik piirväärtus $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, siis rida $\sum_n b_n$ hajub samuti, mistõttu $\lim_{n\to\infty}(b_N + \ldots + b_n) = \infty$ ja seega

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_N + \ldots + b_n}{(b_1 + \ldots + b_{N-1}) + b_N + \ldots + b_n} = 1.$$

Niisiis leidub indeks $N^* \geq N$ nii, et $n \geq N^*$ korral

$$\frac{b_N + \ldots + b_n}{(b_1 + \ldots + b_{N-1}) + b_N + \ldots + b_n} \geq \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon/2}.$$

Iga $n \geq N^*$ korral seega $\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n} \geq L - \varepsilon$.

4. Paneme tähele, et $f(1) = 1$ ja $f(2) = 2$. Olgu nüüd $n \geq 3$ ning olgu $k \in \mathbb{N}$ ja $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}$ sellised, et $s_1 + \ldots + s_k = n$ ning $s_1 \ldots s_k = f(n)$.

   Näitame, et iga i korral $s_i \leq 4$. Oletame, et leidub selline i, et $s_i = 2m+1$, kus m on täisarv ja $m \geq 2$. Asendame elemendi s_i arvudega m ja $m+1$. Siis summa ei muutu, aga korrutis suureneb, sest $m \in \mathbb{R}$ korral

$$m(m+1) > 2m+1 \iff m^2 - m - 1 > 0 \iff m \notin \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right],$$

   aga eelduse kohaselt $m \geq 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Saime vastuolu esialgse komplekti maksimaalsusega. Oletame nüüd, et leidub selline i, et $s_i = 2m$, kus m on täisarv ja $m \geq 3$. Asendame elemendi s_i arvudega m ja m. Siis summa ei muutu, aga korrutis suureneb, sest $m \in \mathbb{R}$ korral

$$m^2 > 2m \iff m^2 - 2m > 0 \iff m \notin [0, 2],$$

   aga eelduse kohaselt $m \geq 3 > 2$. Saime jälle vastuolu esialgse komplekti maksimaalsusega. Sellega oleme välistanud juhu, kus mõne i korral $s_i > 4$.

Näitame nüüd, et iga i korral $s_i \geq 2$. Oletame vastuväiteliselt, et mõne i korral $s_i = 1$. Kuna $n \geq 3 > 1$, siis $k > 1$ ehk saame valida indeksi j nii, et $i \neq j$. Asendame elemendid $s_i = 1$ ja s_j arvuga $s_j + 1$. Siis summa ei muutu, aga korrutis suureneb, mis läheb esialgse komplekti maksimaalsusega vastuollu. Kokkuvõttes saame, et s_i väärtus võib olla vaid 2, 3 või 4.

Kui mõne i korral $s_i = 2$ ja mõne j korral $s_j = 4$, siis võime asendada elemendid s_i ja s_j kahe kolmega. Summa seejuures ei muutu, aga korrutis suureneb. Järelikult ei saa komplektis olla korraga nii kahtesid kui ka neljasid. Kui komplektis oleks vähemalt kaks nelja, siis me võiksime asendada need arvudega 3, 3 ja 2, mille tulemusena ei muutuks summa, aga kasvaks korrutis. Järelikult ei saa komplektis mitu nelja olla. Kui komplektis oleks vähemalt kolm kahte, siis võiksime asendada need kahe kolmega, mille tulemusena summa ei muutuks, aga korrutis jälle kasvaks. Järelikult ei saa komplektis rohkem kui kaks kahte olla.

Kõiki ülalpool saadud tulemusi arvestades näeme nüüd, et:

- kui $n = 3m$, kus $m \in \mathbb{N}$, siis komplektis on m kolme ning seega $f(n) = 3^m$;
- kui $n = 3m + 1$, kus $m \in \mathbb{N}$, siis komplektis on $m - 1$ kolme ja üks neli (või kaks kahte) ning seega $f(n) = 3^{m-1} \cdot 4$;
- kui $n = 3m + 2$, kus $m \in \mathbb{N}$, siis komplektis on m kolme ja üks arv kaks ning seega $f(n) = 3^m \cdot 2$.

5. Kui arvude $x_1, \ldots, x_n$ seas on olemas võrdseid, siis on ka maatriksi A ridade seas olemas võrdseid ridu, mistõttu on maatriks A singulaarne. Eeldame seega järgnevalt, et arvud $x_1, \ldots, x_n$ on paarikaupa erinevad. Mõtleme maatriksist A kui lineaarteisendusest ruumil $\mathbb{R}^n$ (standardse tõlgenduse läbi). Maatriksi A singulaarsuse näitamiseks piisab siis veenduda, et vaadeldav teisendus pole sürjektiivne. Iga $u \in \mathbb{R}^n$ ja iga $i = 1, \ldots, n$ korral

$$[Au]_i = \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j)^k u_j = p_u(x_i),$$

kus p_u on vektorist u sõltuv reaalarvuliste kordajatega polünoom $p_u(x) = \sum_{j=1}^{n} (x + y_j)^k u_j$. Paneme tähele, et $\deg(p_u) \leq k$. Tuletame meelde, et kui m on mittenegatiivne täisarv ning reaalarvud $a_1, \ldots, a_{m+1}$ on paarikaupa erinevad, siis suvaliste $b_1, \ldots, b_{m+1} \in \mathbb{R}$ korral leidub parajasti üks reaalarvuliste kordajatega polünoom p, mille puhul $\deg(p) \leq m$ ja $p(a_i) = b_i$ iga $i = 1, \ldots, m+1$ korral. Olgu nüüd p mingi suvaline reaalarvuliste kordajatega polünoom astmega $n - 1$. Võtame vaatluse alla vektori $v \in \mathbb{R}^n$, $v_i = p(x_i)$. Ülaltoodu põhjal on p ainus reaalarvuliste kordajatega polünoom, mille aste on ülimalt $n - 1$ ja mis rahuldab seost $p(x_i) = v_i$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral. Kuna iga $u \in \mathbb{R}^n$ korral on p_u aste ülimalt k ja eelduse kohaselt $k < n - 1$, siis iga $u \in \mathbb{R}^n$ korral $p_u \neq p$. Seega, ei saa leiduda ühtegi vektorit $u \in \mathbb{R}^n$, mille puhul kehtiks $Au = v$, sest vastasel juhul oleks p_u ülalpool toodud tingimusi rahuldav polünoom, mis erineb aga polünoomist p. Niisiis leiame, et maatriksile A vastav lineaarteisendus pole sürjektiivne. Järelikult on maatriks A singulaarne.