Tartu Ülikooli matemaatikavõistlus

Tartu, 22.11.2024

Ülesanded

1. Olgu a ja b reaalarvud. Arvutage n-ndat järku determinant

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

2. Iga positiivse täisarvu n korral tähistagu $\tau(n)$ selle positiivsete jagajate arvu. Iga positiivse täisarvu n ja iga algarvu p korral tähistagu $\nu_p(n)$ suurimat mittenegatiivset täisarvu k, mille puhul p^k jagab arvu n. Leidke kõik positiivsed täisarvud n, mis rahuldavad võrdust $\tau(2^n - 1) = 2^{\nu_2(n)}$.

   Hea teada: Fermat' arvudeks nimetatakse arve kujul $F_k = 2^{2^k} + 1$, kus k on mõni mittenegatiivne täisarv. Lahenduses on lubatud kasutada teadmist, et arvud F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 on kõik algarvud, aga F_5 mitte (arvud F_k, kus $k \geq 5$, paistavad kõik kordarvud olevat, kuid siiski pole siiani tõestatud, et see ka tõepoolest nii on).

   Märkus: Võistlusele läinud tekstis oli viga, mõeldud $2^n - 1$ asemel oli kirjas 2^{n-1}. Võistlejatele öeldi lahendada ülesannet, mis välja prinditud tekstis kirjas oli.

3. Leidke kõik diferentseeruvad funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad seost

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

   kõigi reaalarvude x ja y korral, mille puhul $xy \neq 1$.

4. Olgu $\lambda \in (0, 1)$. Olgu arvjada $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ selline, et $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ning iga $n \geq 2$ korral $a_n = (1 - \lambda)a_{n-1} + \lambda a_{n-2}$. Leidke jada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ piirväärtus.

5. Kümme poissi ja üheksa tüdrukut ostsid teineteisest sõltumatult ühekaupa kinopiletid samasse ritta, kus on kokku 19 kohta. Kui suur on kõrvutiolevatel toolidel istuvatest ühest poisist ja ühest tüdrukust koosnevate paaride arv keskmiselt? (Näiteks, kui reas on 5 tooli, siis paigutus ptppt annab paaride koguarvuks 3.)

Lahendused

1. Tähistame sellist n-ndat järku determinanti sümboliga D_n. Arvutame determinandi väärtuse mõnede väiksemate n väärtuste korral:

$$\begin{aligned} D_1 &= a + b, \\ D_2 &= a^2 + ab + b^2, \\ D_3 &= a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Siit tekib meil hüpotees, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} b^i.$$

Tõestame selle hüpoteesi matemaatilise induktsiooniga n järgi. Eeldame, et $n > 3$ ja et valem kehtib n-st väiksemate naturaalarvude korral. Arendame determinandi D_n esimese veeru järgi:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

Arendame tekkinud $(n-1)$-ndat järku determinandi esimese rea järgi ja saame

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

Kasutades induktsiooni eeldust D_{n-1} ja D_{n-2} jaoks näeme, et

$$D_n = (a+b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i - ab \sum_{i=0}^{n-2} a^{n-2-i} b^i.$$

Pärast mõningasi arvutusi jõuamegi selleni, et

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} b^i.$$

2. Võistlusele läinud tekstis oli viga, mõeldud $2^n - 1$ asemel oli kirjas 2^{n-1}. Võistlejatele öeldi lahendada ülesannet, mis välja prinditud tekstis kirjas oli. Esitame mõlema ülesande lahenduse.

Võistlusel esinenud variandi lahendus. Arvu 2^{n-1} positiivsete jagajate arv on n, mistõttu võtab võrdus $\tau(2^{n-1}) = 2^{\nu_2(n)}$ kuju $n = 2^{\nu_2(n)}$. Seega peab iga antud võrdust rahuldav arv n olema kujul 2^k, kus k on mingi mittenegatiivne täisarv. Teiselt poolt, kui $n = 2^k$, kus k on mõni mittenegatiivne täisarv, siis $\nu_2(n) = \nu_2(2^k) = k$ ja võrdus $n = 2^{\nu_2(n)}$ kehtib. Seega rahuldavad antud võrdust parajasti need arvud, mis on kujul 2^k, kus k on mingi mittenegatiivne täisarv.

Mõeldud ülesande lahendus. Olgu n ülesande tingimusi rahuldav arv. Tähistagu k suurust $\nu_2(n)$. Siis $n = 2^k m$, kus m on mingi paaritu positiivne täisarv.

Kuna n kohta tehtud eeldus ütleb midagi arvu $2^n - 1$ tegurite kohta, siis on mõistlik proovida arvu $2^n - 1$ tegurdada. Kui $k \geq 1$, saame

$$2^n - 1 = 2^{2^k m} - 1 = (2^{2^{k-1}m})^2 - 1^2 = (2^{2^{k-1}m} - 1)(2^{2^{k-1}m} + 1).$$

Kui $k \geq 2$, saame samal viisil ka avaldist $2^{2^{k-1}m} - 1$ tegurdada, saades üheks teguriks $2^{2^{k-2}m} - 1$, jne. Jätkame seni, kuni jõuame tegurini $2^{2^0 m} - 1$ ehk $2^m - 1$. Sedasi tegutsedes saame seega tegurduse

$$2^n - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)(2^{2m} + 1) \ldots (2^{2^{k-1}m} + 1),$$

kus kõik tegurid on positiivsed täisarvud.

Tõestame, et kõik need tegurid on ka paarikaupa ühistegurita. Selleks piisab näidata, et kui a, t ja q on sellised täisarvud, et a on paaris, t on positiivne ja q on mittenegatiivne, siis $(a^t - 1, a^{qt} + 1) = 1$ ning paaris q korral $(a^t + 1, a^{qt} + 1) = 1$.

Tõestame esimese võrduse. Teeme seda induktsiooniga q järgi. Kui $q = 0$, saame $a^{qt} + 1 = a^0 + 1 = 2$. Kuna aga a on paaris ja $t > 0$, siis $a^t - 1$ ei jagu kahega ning $(a^t - 1, a^{qt} + 1) = 1$. Olgu nüüd q selline, et soovitud võrdus kehtib. Näitame, et see kehtib ka $q + 1$ korral. Tähistame suurima ühisteguri $(a^t - 1, a^{(q+1)t} + 1)$ tähega d. Nüüd saame

$$d \mid a^{(q+1)t} + 1 - a^{qt}(a^t - 1) = a^{qt} + 1.$$

Kuna $d \mid a^t - 1$ ja $d \mid a^{qt} + 1$ ning induktsiooni eelduse järgi $(a^t - 1, a^{qt} + 1) = 1$, siis $d = 1$.

Tõestame teise võrduse. Teeme seda jälle induktsiooniga q järgi. Juht $q = 0$ on käsitletav eelmise tõestusega analoogiliselt. Olgu nüüd q selline, et soovitud võrdus kehtib. Näitame, et see kehtib ka $q + 2$ korral (tuletame meelde, et see kord vaatleme me ainult paarisarve). Tähistagu d meid huvitavat suurust $(a^t + 1, a^{(q+2)t} + 1)$. Saame

$$d \mid a^{(q+1)t}(a^t + 1) - (a^{(q+2)t} + 1) = a^{(q+1)t} - 1,$$

millest edasi

$$d \mid a^{qt}(a^t + 1) - (a^{(q+1)t} - 1) = a^{qt} + 1.$$

Kuna $d \mid a^t + 1$ ja $d \mid a^{qt} + 1$ ning induktsiooni eelduse järgi $(a^t + 1, a^{qt} + 1) = 1$, siis $d = 1$.

Kuna τ on nõrgalt multiplikatiivne funktsioon ($\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ kui a ja b on ühistegurita positiivsed täisarvud), siis

$$\tau(2^n - 1) = \tau(2^m - 1)\tau(2^m + 1)\tau(2^{2m} + 1) \ldots \tau(2^{2^{k-1}m} + 1)$$

ehk

$$\tau(2^m - 1)\tau(2^m + 1)\tau(2^{2m} + 1) \ldots \tau(2^{2^{k-1}m} + 1) = 2^k.$$

Viimase võrduse vasakul poolel olevas korrutises on $k+1$ tegurit. Selle korrutise k parempoolset tegurit on alati ühest suuremad (sest vastavad argumendid on ühest suuremad). Kui $m > 1$, siis sama võib öelda ka esimese teguri kohta. Seega peab kehtima $m = 1$ ning k parempoolset tegurit peavad kõik võrduma kahega - kui vähemalt üks neist tingimustets poleks rahuldatud, oleks korrutise väärtus suurem kui 2^k. Siit teeme järelduse, et $n = 2^k$ ning arvud $2^1 + 1, 2^2 + 1, \ldots, 2^{2^{k-1}} + 1$ peavad kõik algarvud olema ($\tau(n) = 2$ parajasti siis, kui n on algarv). Paneme tähele, et tegemist on niinimetatud Fermat' arvudega. Nagu ülesande tekstis mainitud oli, arvud $2^1 + 1, 2^2 + 1, \ldots, 2^{2^4} + 1$ on kõik algarvud, aga arv $2^{2^5} + 1$ enam mitte. Seega peab kehtima $k - 1 \leq 4$ ehk $k \leq 5$ ning järelikult $n \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Teistpidi, kõigi nende arvude korral võtab varasemalt saadud tegurdus $2^n - 1$ jaoks $m = 1$ tõttu kuju $(2^1 + 1)(2^2 + 1) \ldots (2^{2^{k-1}} + 1)$, kusjuures $k \leq 5$ tõttu on kõik k tegurit algarvud, mistõttu $\tau(2^n - 1) = 2^k$. Kokkuvõttes on ülesande vastuseks seega arvud 1, 2, 4, 8, 16, 32.

3. *Lahendus 1.* Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soovitud tingimusi rahuldav funktsioon. Pannes eelduseks olevas võrrandis muutuja y nulliga võrduma ($y = 0$ korral $xy = 0 \neq 1$), saame seose $f(x) + f(0) = f(x)$, millest tuleneb võrdus $f(0) = 0$. Tehes nüüd selles võrrandis asenduse $y = -x$ ($y = -x$ korral $xy = -x^2 \leq 0 < 1$), jõuame seoseni $f(x) + f(-x) = f(0)$, millest $f(0) = 0$ tõttu saame $f(-x) = -f(x)$.

   Olgu nüüd x suvaline reaalarv. Olgu Δx selline reaalarv, et $\Delta x \neq 0$ ja $x(x + \Delta x) \neq 1$. Siis eelduseks oleva seose ja võrduse $f(-x) = -f(x)$ abiga saame

$$\begin{aligned}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) + f(-x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} f\left(\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}\right) \\ &= \frac{1}{1 + x(x + \Delta x)} \cdot \frac{f(\Delta x^*)}{\Delta x^*},\end{aligned}$$

   kus Δx^* tähistab suurust $\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}$. Kuna funktsioon f on diferentseeruv, siis piirprotsessis $\Delta x \to 0$ saame vasakul pool tuletise $f'(x)$. Paneme tähele, et $f(0) = 0$ tõttu on murd $\frac{f(\Delta x^*)}{\Delta x^*}$ esitatav kujul $\frac{f(0+\Delta x^*)-f(0)}{\Delta x^*}$. Järelikult, kuna protsessi $\Delta x \to 0$ korral $1 + x(x + \Delta x) \to 1 + x^2 > 0$, siis $\Delta x \to 0$ korral ka $\Delta x^* \to 0$ ning $\frac{f(\Delta x^*)}{\Delta x^*} \to f'(0)$. Piirprotsessis $\Delta x \to 0$ saame võrduste ahela viimasest avaldisest seega $\frac{f'(0)}{1+x^2}$. Kuna lisaeeldus $x(x + \Delta x) \neq 1$ eemaldab vaid maksimaalselt ühe võimaliku Δx väärtuse, siis piirväärtuse ühesust see eeldus ei mõjuta ja seega saame piirile minnes kokkuvõttes võrduse

$$f'(x) = \frac{k}{1 + x^2},$$

   kus $k = f'(0)$. Paneme tähele, et samasugune tuletis on ka võrdusega $g(x) = k \arctan(x)$ defineeritud funktsioonil. Siit tuleneb, et $f(x) = k \arctan(x) + C$, kus C on mõni reaalarv. Varasemalt saadud seosele $f(0) = 0$ toetudes saame aga $C = 0$. Niisiis $f(x) = k \arctan(x)$. Paneme nüüd aga tähele, et tekstis toodud võrduses saame piirprotsessi $x, y \to \infty$ puhul vasakul pool $k\pi$, samas kui parema poole absoluutväärtus jääb alati suurusest $|k|\pi/2$ väiksemaks. See on võimalik vaid siis, kui $k = 0$. Niisiis peab f olema nullfunktsioon. Teistpidi, nullfunktsiooni puhul on kõik ülesande tingimused ka ilmselt rahuldatud.

Lahendus 2. Pakume ka ühe alternatiivse lahenduse. Lahendus on inspireeritud võistlustöödes esinenud mõttekäikudest.

Esiteks paneme tähele, et nullfunktsioon rahuldab ülesande tingimusi. Näitame nüüd, et kui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rahuldab ülesande tingimusi, siis f on nullfunktsioon. Seejuures ei lähe meil vaja funktsiooni f diferentseeruvust, vaid hoopis ainult selle pidevust.

Alustame seose $f(-x) = -f(x)$ tuletamisest, mida teeme samamoodi nagu esimeseski lahenduses. Olgu nüüd reaalarv x selline, et $x \notin \{-1, 1\}$. Siis $x^2 \neq 1$ ja seega tehes eelduseks olevas võrrandis asenduse $y = x$ saame mõlemat poolt kahega jagades

$$f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right).$$

Paneme tähele, et protsessi $|x| \to \infty$ puhul leiab aset koondumine $\frac{2x}{1-x^2} \to 0$ ning f pidevuse ja võrduse $f(0) = 0$ tõttu seega ka koondumine $f(\frac{2x}{1-x^2}) \to 0$. Protsessi $|x| \to \infty$ puhul niisiis $f(x) = \frac{1}{2} f(\frac{2x}{1-x^2}) \to \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$. Paneme veel tähele, et protsessis $x \to 1$ saame $|\frac{2x}{1-x^2}| \to \infty$, mistõttu eelneva põhjal $f(\frac{2x}{1-x^2}) \to 0$ ja seega jälle $f(x) \to 0$. Samas, protsessis $x \to 1$ peab f pidevuse tõttu olema $f(x) \to f(1)$. Piirväärtuse ühesuse tõttu seega $f(1) = 0$, kusjuures seosest $f(-x) = -f(x)$ saame siis ka võrduse $f(-1) = 0$.

Nüüd, kuna f on pidev ja $\lim_{|x| \to \infty} = 0$, siis f on tõkestatud. Tõepoolest, koondumise $\lim_{|x| \to \infty} = 0$ tõttu peab leiduma selline positiivne reaalarv R, et $|f(x)| \leq 1$ kui $|x| > R$. Kuna aga lõigus pidev funktsioon on tõkestatud, siis f on tõkestatud lõigus $[-R, R]$. Kuna R valiku tõttu on f tõkestatud ka hulgas $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$, siis ongi f kogu määramispiirkonnas tõkestatud.

Niisiis leiduvad lõplikud $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ ja $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Seejuures, seose $f(-x) = -f(x)$ tõttu ilmselt $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ ja $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \geq 0$. Tähistame supreemumi $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ tähega M. Kui $M = 0$, siis f on ilmselt nullfunktsioon. Jääb seega üle veenduda, et eeldus $M > 0$ viib vastuoluni. Eeldame vastuväiteliselt, et $M > 0$.

Näitame, et peab leiduma $c \in \mathbb{R}$ nii, et $f(c) = M$. Esiteks, koondumise $\lim_{|x| \to \infty} = 0$ tõttu peab leiduma selline positiivne reaalarv R, et $|f(x)| \leq M/2$ kui $|x| > R$. Kuna $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = M$, siis $\sup_{x \in [-R,R]} f(x) \leq M$. Kui aga $\sup_{x \in [-R,R]} f(x) < M$, siis $\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus [-R,R]} f(x) \leq M/2$ tõttu kehtiks ka $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) < M$, mis pole aga võimalik. Niisiis $\sup_{x \in [-R,R]} f(x) = M$. Kuna lõigus pidev funktsioon saavutab oma ekstremaalsed väärtused, siis peab leiduma selline $c \in [-R, R]$, et $f(c) = M$. Kuna $M > 0$ ning $f(1) = f(-1) = 0$, siis $c \notin \{-1, 1\}$. Varasemalt saadud seose järgi seega $f(c) = \frac{1}{2} f(\frac{2c}{1-c^2})$, millest $f(\frac{2c}{1-c^2}) = 2M > M$, mis läheb aga vastuollu sellega, et $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Märkus. See ülesanne on raamatu „The Red Book of Mathematical Problems" ülesanne 37. Väärib mainimist, et raamatus endas on ülesandele vale vastus antud. Pakutud lahenduses on näidatud, et iga ülesande tingimusi rahuldav funktsioon f on kujul $f(x) = k \arctan(x)$, kus k on mingi reaalarv. Selle järel aga väidetakse ilma põhjenduseta, et kõik sellised funktsioonid rahuldavad ülesande tingimusi.

4. Paneme tähele, et arvjada $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ on hääbuva geomeetrilise jada $((-\lambda)^n)_{n=0}^{\infty}$ osasummade jada (tõestatav induktsiooniga). Viimasest tuleneb, et $\lim_n a_n = \frac{1}{1-(-\lambda)} = \frac{1}{1+\lambda}$.

5. Tõenäosus, et kaks esimest kohta on hõivatud eri soost kinokülastajate poolt, on
$$\frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} + \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{10}{19}.$$
See on ühtlasi ka keskmine paaride arv kahel esimesel kohal, sest
$$\frac{10}{19} \cdot 1 + \frac{9}{19} \cdot 0 = \frac{10}{19}.$$
Sama arutelu kehtib ka iga teise kõrvutise toolipaari korral. Seega on eri soost paaride keskmine koguarv antud kinoreas
$$18 \cdot \frac{10}{19} = \frac{180}{19} = 9\frac{9}{19}.$$
Lahenduses on kasutatud indikaatori keskväärtuse ja summa keskväärtuse valemeid: 1) kui juhuslik suurus X on selline, et $X = 1$ kui sündmus A toimub ja $X = 0$ vastasel juhul, siis $EX = P(A)$; 2) suvaliste lõplikku keskväärtust omavate sündmuste $X_1, \ldots, X_n$ korral $E(X_1 + \cdots + X_n) = EX_1 + \cdots + EX_n$.