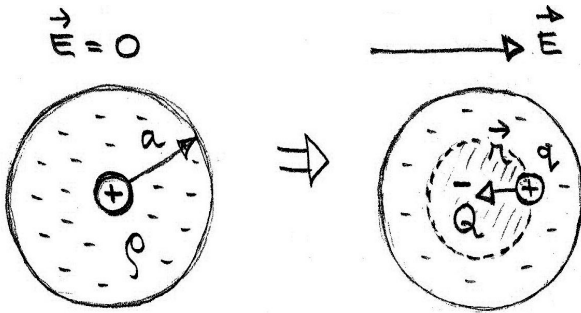


VAHELDUVVOOL AINES

Uurime aatomi Thomsoni mudelit: tühiselt väike tuum laenguga $+q$ on ümbritsetud kerakujulisest ühtlasest elektronpilvest raadiusega a ning laengu ruumtihedusega ρ :



Elektriväljas $\vec{E}$ nihkub elektronpilve kese tuuma suhtes r võrra väljale vastassuunas

Olgu $\vec{r}$ elektronpilve keskmise kohavektori tuuma suhtes. Kuna elektronpilve laengu ruumtihedus on

$$\rho = \frac{-q}{\frac{4}{3}\pi a^3},$$

siis paikneb sfääris raadiusega r laeng

$$Q = \frac{-q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = -\frac{r^3}{a^3}q$$

Tasakaaluasendit taastav jõud avaldub kujul:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r) \cdot q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3} \left(-\frac{q}{r^3}\right) \cdot q\vec{r} = \frac{-q^2\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

Staatilises

$$\text{olukorras: } \underbrace{\vec{F}(\vec{r})}_{\text{paremale}} - \underbrace{q\vec{E}}_{\text{vasakule}} = 0,$$

kusjuures $\vec{r}$ on suunatud vasakule, $\vec{F}$ aga paremale.

Siit saame, et

$$-\frac{q^2\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3} = q\vec{E} \quad | : q \quad \text{Arvestame, et dipoolmoment } \vec{p}_e = -q\vec{r} \text{ on suunatud paremale ehk vastu } \vec{r} \text{ suunale}$$

$$\text{seega } \vec{p}_e = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}.$$

Kasutame ruumalaühikutes mõõdetavat polariseeritavust $\alpha = \alpha_V = \frac{p_e}{\epsilon_0 E}$, seega

$$\vec{p}_e = \alpha \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{ning staatiline atomaarne polariseeritavus } \alpha = 4\pi a^3 \quad \text{ehk } \alpha = 3V_{at}, \quad (1)$$

polariseeritavus võrdub aatomi kolmekordse ruumalaga.

Kui elektriväli muutub ajas sagedusega ω , s.t. $E = E_0 \cos \omega t$ või komplekskujul $E = E_0 e^{-j\omega t}$,

siis muutub sama sagedusega ka dipoolmoment $p_e = p_{e0} e^{-j\omega t}$ ja $\ddot{\vec{p}}_e = (-j\omega)(-j\omega)\vec{p}_e = -\omega^2 \vec{p}_e$

Nüüd siis Newtoni II seadus: $\vec{F}(\vec{r}) - q\vec{E} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$, millest

$$-m\ddot{\vec{r}} - \frac{q^2\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3} = q\vec{E}(t) \quad \left| \cdot \frac{q}{m} \right. \quad \Longrightarrow \quad -q\ddot{\vec{r}} - \frac{q^2}{\alpha\epsilon_0 m} q\vec{r} = \frac{q^2}{m} \vec{E}(t) \quad (2)$$

Tulemus on sama mis klassikalises võnkumisteoorias sumbumatu sundvõnkumise diferentsiaalvõrrand

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad \text{kusjuures omavõnkesagedus} \quad \omega_0^2 = \frac{q^2}{\alpha \epsilon_0 m}. \quad (3)$$

$$\text{Seega } -\omega^2 \vec{p}_e + \omega_0^2 \vec{p}_e = \frac{q^2}{\alpha \epsilon_0 m} \cdot \alpha \epsilon_0 \vec{E}(t) = \omega_0^2 \alpha \epsilon_0 \vec{E}(t) \quad , \text{ millest } (\omega_0^2 - \omega^2) \vec{p}_e = \omega_0^2 \alpha \epsilon_0 \vec{E}(t)$$

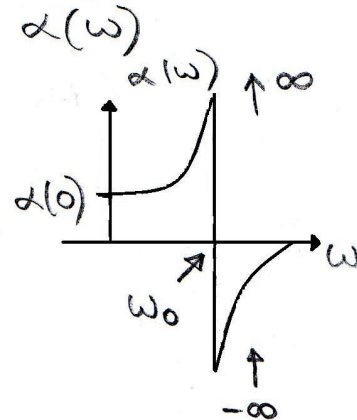
$$\text{ja } \vec{p} = \alpha \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \varepsilon_0 \vec{E}(t) \quad (4)$$

Seega dünaamiline (sagedusest sõltuv) polariseeritavus

$$\alpha(\omega) = \alpha(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (5a)$$

Sumbumise puudumisel on see graafiliselt toodud parempoolsel joonisel:

$$\text{Sumbumist arvestades: } \alpha(\omega) = \alpha(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - j\beta\omega - \omega^2} \quad (5b)$$



DÜNAAMILINE JUHTIVUS

Alalisvoolu korral võrdub laengukandjaid liikuma panev elektrijõud F_e suunatud liikumist takistava jõuga F_t

$$F_e = F_t \quad \text{ehk} \quad qE = b v \quad \text{või} \quad qE = \frac{m}{\tau} v \quad \text{või ka} \quad qE - \frac{m}{\tau} v = 0$$

Vahelduvvoolu korral võtab seesama võrrand kuju:

$$q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} \quad (6)$$

kusjuures väljatugevus muutub ajas perioodiliselt: $E = E_0 e^{-j\omega t}$, seega muutub perioodiliselt ka laengukandjate suunatud liikumise kiirus, omades üldjuhul E suhtes faasinihet φ : $v = v_m e^{-j(\omega t + \varphi)}$.

Sellest ja võrrand (6) nüüd:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -j\omega \vec{v} \quad \frac{q}{m} \tau \vec{E} - \vec{v} = -j\omega \tau \vec{v} \quad \text{ehk} \quad \frac{q}{m} \tau \vec{E} = (1 - j\omega \tau) \vec{v} \cdot nq$$

Ühtekokku:

$$\frac{nq^2}{m} \tau \vec{E} = (1 - j\omega \tau) nq \vec{v} \quad (7)$$

Teatavasti aine erijuhtivus alalisvoolule $\sigma_0 = \frac{nq^2}{m} \tau$ ja voolutihedus $\vec{J} = nq \vec{v}$. Seega oleme saanud

Ohmi seaduse diferentsiaalkujul $\vec{J} = \frac{\sigma_0}{1 - j\omega \tau} \vec{E}$, milles esineb sagedusest sõltuv ehk **dünaamiline**

$$\text{kompleksne erijuhtivus:} \quad \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - j\omega \tau} \quad (8)$$

Kui kaotame imaginaarsuse nimetajas, siis saame

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \sigma_0 \frac{1 + j\omega \tau}{(1 - j\omega \tau)(1 + j\omega \tau)} = \sigma_0 \frac{1 + j\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Elektrijuhtivuse ajateguri τ pöördväärtust on kombeks nimetada **hajumissageduseks**: $\omega_\tau = 1/\tau$.

Selle abil saame defineerida funktsiooni $F(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_\tau^2}} = \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2}$, mille kaudu erijuhtivus:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \sigma_0 F(\omega) + j\sigma_0 \frac{\omega}{\omega_\tau} F(\omega)$$

Madalal sagedusel ($\omega \rightarrow 0$) saame, et $F(\omega) \rightarrow 1$, siis $\text{Re } \sigma \rightarrow \sigma_0$ ja $\text{Im } \sigma \rightarrow 0$.

Kõrgel sagedusel ($\omega \rightarrow \infty$) saame, et $F(\omega) \rightarrow 0$ $\text{Re } \tilde{\sigma}(\omega) \sim \frac{1}{\omega^2} \rightarrow 0$, $\text{Im } \tilde{\sigma}(\omega) \sim \frac{1}{\omega} \rightarrow 0$,

kompleksse juhtivuse reaalkomponent läheneb sageduse suurenemisel nullile kiiremini kui imaginaarosa. Suurust ω_p , mis on määratud valemile (3) analoogilise seosega

$$\omega_p^2 = \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m} \quad (9)$$

nimetatakse **plasmasageduseks**. See on vabade laengukandjate süsteemi omavõnkesagedus, kusjuures q on ühe laengukandja laeng, m – selle mass ja n – laengukandjate kontsentratsioon. Aine erijuhtivus alalisvoolule σ_0 on avaldatav hajumissageduse ja plasmasageduse kaudu:

$$\sigma_0 = \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\varepsilon_0}{\omega_\tau} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau} \quad (10)$$

Dünaamilist erijuhtivust kasutades on kogu voolu seadus (H -vektori tsirkulatsiooniteoreem) esitatav kujul:

$$\text{rot } \vec{H}(\omega) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma(\omega) \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_L (-j\omega) \vec{E} = \left[\sigma_0 F(\omega) + j \frac{\omega}{\omega_\tau} \sigma_0 F(\omega) - j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_L \right] \vec{E} = \tilde{\sigma}(\omega) \vec{E}$$

kus nihkevoolu tihedust vaadeldakse juhtivusvoolu tiheduse imaginaarosana.

Suurus ε_L on kristallvõre (*lattice*) koostisesse kuuluvatest (seotud) elektronidest põhjustatud dielektriline läbitavus, mis on määratud dünaamilise polariseeritavusega $\alpha(\omega)$ (valemid 5a ja 5b):

$$\varepsilon_L = 1 + \chi(\omega) = 1 + n_a \alpha(\omega),$$

kus n_a on aatomite (dipoolide) kontsentratsioon. Loomulikult on ka ε_L sõltuv sagedusest, kuid seda me siin ei käsitle, kuna vabade ja seotud laengukandjate omavõnkesagedused reeglina kokku ei lange. Ühtekokku siis aine **dünaamiline erijuhtivus**:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau} \cdot \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{\omega_\tau} \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau} \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} - j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_L \quad (11) \quad E = E_m e^{-j\omega t}.$$

Kui eeldame, et $E = E_m e^{j\omega t}$, mis on makroskoopilise vahelduvvoolu käsitlemisel enam levinud variant, siis saame erijuhtivuse valemiks eelmise avaldise kaaskompleksi:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau} \cdot \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\omega_\tau} \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau} \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_L \quad (12)$$

See on analoogiline kompleksse juhtivusega vahelduvvoolu rööpahelas, mis sisaldab ühes harus jadamisi ühendatud aktiiv- ja induktiivtakistust (RL -jada) ning teises harus mahtuvustakistust. Seega skeem „ RL -jada rööpselt C -ga“:

$$G(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \quad \tilde{G}(\omega) = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C$$

Teatavasti saab sellises skeemis toimuda **vooluresonants**. Elektri juhtiva aine korral nimetatakse seda nähtust **plasmaresonantsiks**. See leiab aset sagedusel $\omega_L = \omega_p / (\varepsilon_L)^{1/2}$, kus ω_p on valemiga 9 määratud plasmasagedus.

Kompleksse juhtivuse kontseptsioon vaatles nihkevoolu tihedust juhtivusvoolu tiheduse imaginaarosana. Kui me aga vaatleme juhtivusvoolu tihedust hoopis nihkevoolu tiheduse imaginaarosana, siis saame dielektrilise funktsiooni.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}(\omega) &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \left[-j \cdot j \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon_0 \omega} \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau} F(\omega) + j \frac{\omega}{\omega_\tau} \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau} F(\omega) - j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_L \right] \vec{E} \\ &= -j\omega \varepsilon_0 \left[\varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau^2} F(\omega) + j \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau \omega} F(\omega) \right] \vec{E} = -j\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}(\omega) \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}(\omega) \vec{E}] = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\omega) \end{aligned}$$

Ajas sagedusega ω perioodiliselt muutuva magnetvälja tugevuse rootor võrdub ajalise tuletisega samamoodi

perioodiliselt muutuvast komplekssest elektrinihkst. Viimane on omakorda määratud kompleksse dielektrilise läbitavuse ehk **dielektrilise funktsiooniga** (DF)

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} + j \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau \omega} \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2}, \quad (13)$$

mille reaalosa kirjeldab seotud elektronide nihkumist elektriväljas (nihkevoolu) ning imaginaarosa vabade elektronide liikumist elektrivälja mõjul (juhtivusvoolu).

Mõni sõna ka elektrivoolu võimsusest. Aine ruumalaühikus eralduv ajaline keskmine võimsus ehk **erivõimsus** on vahelduvvoolu korral esitatav kujul

$$\left\langle \frac{dP}{dV} \right\rangle_t = \left\langle \frac{\tilde{J} + \tilde{J}^*}{2} \cdot \frac{\tilde{E} + \tilde{E}^*}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{4} [\tilde{\sigma} E_m^2 e^{-j2\omega t} + \tilde{\sigma} E_m^2 e^{j\omega t - j\omega t} + \tilde{\sigma}^* E_m^2 e^{j\omega t - j\omega t} + \tilde{\sigma}^* E_m^2 e^{j2\omega t}] \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^*}{2} E_m^2 = \frac{1}{2} \sigma' E_m^2$$

Tulemus on analoogiline makroskoopilise vahelduvvoolu füüsikast tuntud integraalse võimsuse valemiga

$$P = \frac{1}{2} I_m U_m = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R} = \frac{1}{2} G U_m^2$$

Kuna dünaamilise erijuhtivuse reaalosa saab esitada dielektrilise funktsiooni imaginaarosa kaudu

$$\sigma' = \sigma_0 F(\omega) = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau} \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} = \varepsilon_0 \omega \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau \omega} \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} = \varepsilon_0 \omega \varepsilon'',$$

siis võib väita, et vahelduvvoolu erivõimsuse määrab DF imaginaarosa

$$\left\langle \frac{dP}{dV} \right\rangle_t = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon'' E_m^2$$

Uurime nüüd ka piirjuhte:

a) Madal sagedus $\omega \ll \omega_\tau$.

Sel juhul on sageduse ruut dielektrilise funktsiooni reaalosa valemis tühine ja $\varepsilon' \approx \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau^2}$,

seega ε' on peaaegu konstantne. Kuna hästi elektrit juhtivas metallis võib suhe ω_p^2/ω_τ^2 olla suurusjärgus 300-400 (arvutage prooviks!) ja metalli korral $\varepsilon_L \approx 1$ (valentselektronid on muutunud juhtivuselektronideks, aga sisemised elektronihid peaaegu ei polariseeru), siis on ε' metallis absoluutväärtuselt suur ja negatiivne. Samas on DF imaginaarosa võrdeline elektrijuhtivuse ajateguriga

$$\varepsilon'' = \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau \omega} \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau \omega} = \frac{\omega_p^2}{\omega} \tau,$$

mistõttu on ajateguriga võrdeline ka erivõimsus. Võimsus on seda suurem, mida kauem laengukandja elektriväljas kiirenevalt liikuda saab. Kogutud energia antakse igal hajumisprotsessil üle aine teistele osakestele.

b) Kõrge sagedus $\omega \gg \omega_\tau$.

$\varepsilon' = \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} \approx \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ja DF reaalosa võrdsustumisel nulliga leiab aset plasmaresonants. Siit saamegi valemi $\omega_L = \omega_p / (\varepsilon_L)^{1/2}$. Samas on DF imaginaarosa ja seega ka erivõimsus pöördvõrdelised ajateguriga ning eralduv võimsus kahaneb kiiresti sageduse suurenemisel:

$$\varepsilon'' = \frac{\omega_p^2}{\omega_\tau \omega} \frac{\omega_\tau^2}{\omega_\tau^2 + \omega^2} \approx \frac{\omega_p^2 \omega_\tau}{\omega^3} = \frac{\omega_p^2}{\omega^3} \frac{1}{\tau}.$$

Võimsus on seda suurem, mida tõenäolisemad on hajumisprotsessid (mida suurem on ω_τ). Hajumisprotsesside üldine tõenäosus on nagunii madal, sest laengukandjad "tõmbuvad" inertsitõttu ühe koha peal. Nad ei jõua veel ühes suunas liikuma hakatagi, kui elektrivälja polaarsus juba muutub.