

Maxwelli võrrandid ja elektromagnetlained vaakumis (Duffin, 13. ptk)

1. Nihkevool (*displacement current*):

Elektromagnetvälja poolt mõjub mistahes elektromagnetiliselt aktiivsele objektile üldistatud Lorentzi jõud. Selle võib esitada **diferentsiaalkujul**, mis oleks ruumielemendis dV paiknevale ja laengu ruumtihedust ρ_c omavale aine kogusele mõjuva diferentsiaalse jõu avaldis

$$d\mathbf{F} = (\rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV,$$

kus plussmärgist vasakul on elektrijõud $dQ \mathbf{E} = \rho_c dV \mathbf{E}$,
paremal aga magnetjõud $I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = (I/dS) \cdot dS d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} dV \times \mathbf{B}$.

Integraalkujul on see laengut Q omavale kehale mõjuva jõu avaldis:

$$\mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13.1)$$

Kasutades kõiki nelja väljavektorit $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{H}$, saame seni uuritud Maxwelli võrrandid esitada nii integraalkujul (vasakul) kui diferentsiaalkujul (paremal)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_V Q_c = \int_V \rho_c dV \quad \text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad (13.2)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13.3)$$

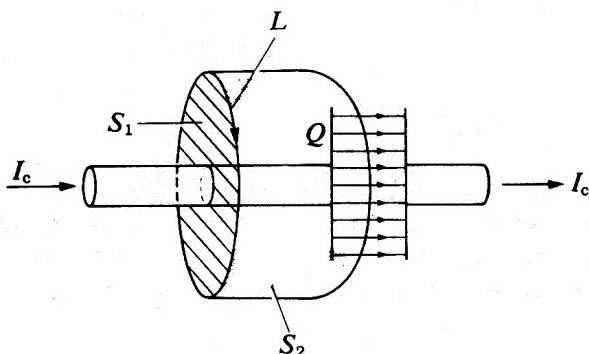
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (13.4)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum_S I_c = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \quad (13.5)$$

Neile lisandub pidevuse võrrand:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{div } \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (13.6)$$

Vaatleme plaatkondensaatorit, mida laeb **juhtivusvool** I_c ehk laengukandjate suunatud liikumisest põhjustatud vool (*conduction current*):



Uurime kinnist pinda, mis ümbritseb kondensaatori vasakpoolset plaati. See pind koosneb kahest osast, pindaladega S_1 ja S_2 . Pinna S_1 piirjoont L läbib vool I_c , aga pinda S_2 vool ei läbi, mistõttu tsirkulatsioonilause põhjal peaks kehtima

$$\begin{aligned} \text{pinna } S_1 \text{ jaoks} \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= I_c \quad \text{ning} \\ \text{pinna } S_2 \text{ jaoks} \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= 0, \quad (13.7) \end{aligned}$$

Kuid pindadel S_1 ja S_2 on ühine piirjoon L , mistõttu kaks vaadeldavat integraali on identsed. Järelikult on võrrandid 13.7 omavahel vastuolus, mida saab lahendada vaid nende parema poole ümbermõtestamise teel. Tuleb arvestada, et pinda S_2 läbivad ajas muutuva elektri-
nihke ($\mathbf{D}$ -välja) jooned. Laadimisel laengu pindtihedus σ kondensaatori plaatidel ju
muutub, samas teame aga elektrostaatikast, et kondensaatori korral $\sigma = D$.
Selgub, et on mõttekas defineerida mõiste **nihkevoolu tugevus**, mis näitab, kui palju muutub
ajaühikus kondensaatori plaadi laeng

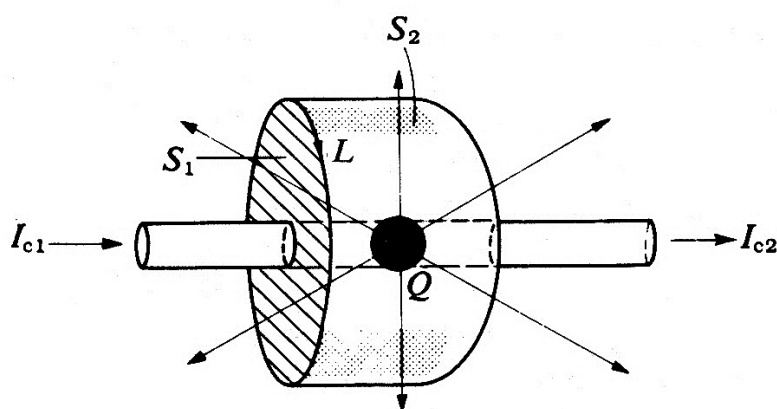
$$I_d = \frac{d(\sigma S)}{dt} = \frac{d(D S)}{dt} \quad (13.8)$$

Kui nüüd eeldada, et tsirkulatsioonilause paremas pooles ei seisa mitte ainult juhtivusvool
vaid juhtivus- ja nihkevoolu tugevuste summa $I_c + I_d$, siis vastuolu 13.7 laheneb.

Üldjuhul me defineerime nihkevoolu avaldisega

$$I_d = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (13.9)$$

kus suurust $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ nimetame **nihkevoolu tiheduseks**.



Samuti eeldame nüüd, et läbi pindade
 S_1 ja S_2 võib kulgeda nii juhtivus- kui
ka nihkevool. Kuna pindadega S_1 ja
 S_2 piiratud ruumis paikneb konden-
saatori plaat, mille laeng Q muutub,
siis sellesse ruumi sisenevad ja
sellest väljuvad voolud on erinevad:

$$I_{c1} - I_{c2} = \frac{dQ}{dt}. \quad (13.10)$$

Kui rakendame sellesama ruumiosa kohta Gaussi teoreemi elektrinihke vektori kohta, siis
saame

$$\int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

Rakendame sellele seosele ajalise tuletise operaatorit:

$$-I_{d1} + I_{d2} = \frac{dQ}{dt}. \quad (13.11)$$

Miinusmärk I_{d1} ees tuleneb vajadusest arvestada joonel L valitud positiivset suunda.
Võrrandite 13.10 ja 13.11 ühendamisel saame, et

$$I_{c1} + I_{d1} = I_{c2} + I_{d2}.$$

Seega summaarne voolutugevus jääb konstantseks ja sõltumatuks vaadeldavat ruumiosa
ümbritseva pinna S kujust. Seega tsirkulatsioonilause väljendava Maxwell võrrandi 13.5

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum_S I_c = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} \quad \text{ehk} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$$

nihkevoolu arvestavaks üldistuseks on:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_c + I_d \quad \text{ehk} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d \quad (13.12)$$

Pidevuse võrrand 13.6 võtab kuju

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (13.13)$$

Nüüd siis on Maxwelli võrrandid integraalkujul (vasakul) ja diferentsiaalkujul (paremal) järgmised:

$$\text{Gaussi lause elektrostaatikas: } \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_V Q_c = \int_V \rho_c dV; \quad \text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\text{EM induktsiooni seadus: } \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}; \quad \text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{Gaussi lause magnetvälja kohta: } \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{Tsirkulatsioonilause: } \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum_S I_c = \int_S \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}; \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

2. Elektromagnetlained vaakumis:

Asume nüüd vaatlema Maxwelli võrrandeid mittepolariseerivas ($\varepsilon = 1$), mittemagneetivas ($\mu = 1$), vabu laengukandjaid mitte sisaldavas ($\rho_c = 0$) ja mittejuhtivas ($\mathbf{J}_c = 0$) keskkonnas. Rangelt vastab neile nõuetele ainult vaakum.

$$\text{Gaussi lause} \quad \text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad \text{võtab kuju} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

$$\text{tsirkulatsioonilause} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{aga kuju} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}.$$

Seega kogu Maxwelli võrrandisüsteem:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (13.24)$$

Kui soovime saada ainult $\mathbf{E}$ käitumist kirjeldavat võrrandit, peame elimineerima $\mathbf{B}$. Selleks võtame rootori teise võrrandi mõlemast poolest, korrutades neid vektoriaalselt nabla-vektoriga, vahetame diferentseerimise järjekorra ning asendame $\text{rot } \mathbf{B}$ neljandast võrrandist.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (13.25)$$

Kasutame matemaatilises füüsikas õpitud samasust

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad \text{ehk} \quad \text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

Kuna esimese võrrandi kohaselt $\text{div } \mathbf{E} = 0$, siis ka $\text{grad div } \mathbf{E} = 0$ ning oleme saanud

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (13.26)$$

Analoogiliselt võib $\mathbf{E}$ elimineerimise teel näidata, et

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (13.27)$$

Seega käituvad elektriväli ja magnetväli ühtemoodi. Kui näiteks E_y sõltuks ainult ruumikoordinaadist x siis 13.26 põhjal kehtiks võrrand

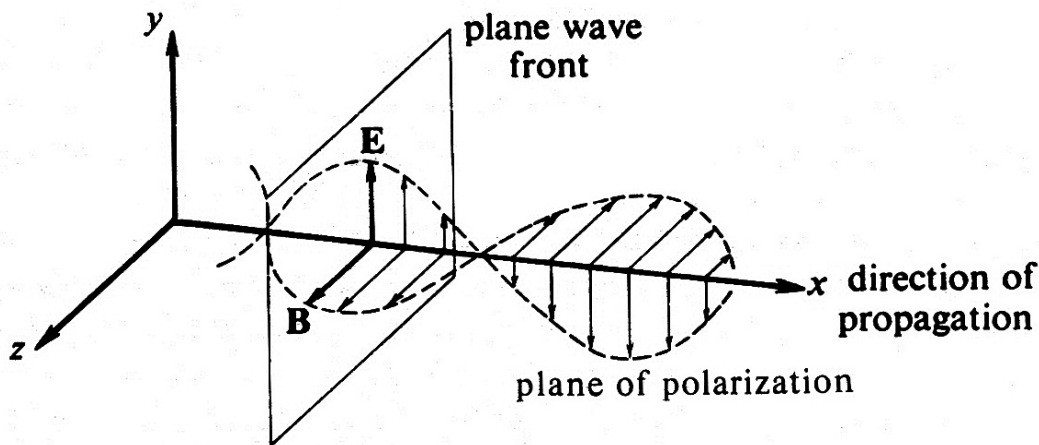
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (13.28)$$

mis on ühedimensionaalne lainevõrrand selliste lainete jaoks, mille faasikiirus on $(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$.

NB! Duffini õpiku originaalis on selles kohas trükkiviga – võrdusmärgi asemel on miinusmärk.

Seega on 13.26 ja 13.27 kolmedimensionaalsed lainevõrrandid elektromagnetlainete jaoks vaakumis, kusjuures lainete levimiskiirus on c :

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (13.29)$$



Uurime nüüd EM-lainete olulist erijuhtu – **piiramatult levivat tasalainet** (*unbounded plane wave*). Piiramatu levik tähendab seda, et laine ei peegeldu kusagilt tagasi ja meil pole vaja uurida edasi kulgeva ning tagasi peegelduva laine interferentsi. Kui laine levib x -telje suunas, siis lainefrondid paiknevad yz -tasandis, mistõttu osatuletised väljavektorite x -komponentidest on nullid:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (13.30)$$

Seega EM induktsiooni seadust väljendav Maxwelli võrrand võtab koordinaatides kuju

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (13.31.a)$$

ja tsirkulatsioonilausest väljendav Maxwelli võrrand võtab kuju

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (13.31.b)$$

13.31.a esimeseks võrrandiks on näiteks EM induktsiooni seadus y -komponendi jaoks

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y \mathbf{j} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} = \left(0 - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \mathbf{j},$$

kus $\mathbf{j}$ on y -telje suunaline ühikvektor. Analoogiliselt saadakse ka 13.31 ülejäänud võrrandid. Võrrandid 13.30 väljendavad tõdemust, et väljavektorite $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{B}$ x -komponendid ei muutu ei ajas ega ruumis, mistõttu x -telje suunalised elektri- või magnetväljad ei saa olla uuritava EM laine osad. EM tasalaine vaakumis on täielikult **ristlaine**.

Kui me valime x - ja y -telje nii, et $\mathbf{E}$ -vektor on suunatud piki y -telge ning seega $E_z = 0$, siis süsteemi 13.31 esimese ja neljanda võrrandi põhjal

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0,$$

millest tulenevalt ka B_y ei muutu ei ajas ega ruumis. See tähendab, et $\mathbf{B}$ -vektor on suunatud ainult piki z -telge, ehk siis $\mathbf{E}$ - ja $\mathbf{B}$ -vektorid on EM-laines omavahel risti ja nad on ka risti laine levimissuunaga, milleks antud näites on x -telg. Vektorkorrutis $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ on laine levimise suunaline. Lainet, milles $\mathbf{E}$ - ja $\mathbf{B}$ -vektorid on mõlemad risti laine levimissuunaga, nimetatakse **TEM-laine**ks (*transverse electric and magnetic*). Seega piiramatult leviv EM tasalaine on TEM-laine.

Monokromaatse laine erijuhul, kui on võimalik ainult üks kindel ringsageduse ω ja lainearvu k väärtus on lainevõrrandite 13.26 või 13.27 lahenditeks järgmised lainefunktsioonid (proovida iseseisvalt läbi!)

$$E_y = E_{y0} \sin(kx - \omega t), \quad B_z = B_{z0} \sin(kx - \omega t + \alpha),$$

kus α on üldjuhul võimalik faasivahe $\mathbf{E}$ - ja $\mathbf{B}$ -vektorite pikkuste perioodilises muutumises. Kasutades süsteemi 13.31.a teist võrrandit, saame, et

$$k E_{y0} \cos(kx - \omega t) = \omega B_{z0} \cos(kx - \omega t + \alpha),$$

kusjuures ainus α , mis rahuldab süsteemi 13.31 nõudeid, on null. Seega $\mathbf{E}$ - ja $\mathbf{B}$ -vektorid on piiramatult levivas EM tasalaines omavahel faasis ning nende amplituudid peavad rahuldama seost $k E_{y0} = \omega B_{z0}$ ehk siis $E_{y0}/B_{z0} = \omega/k = c$. Seega kehtib seos

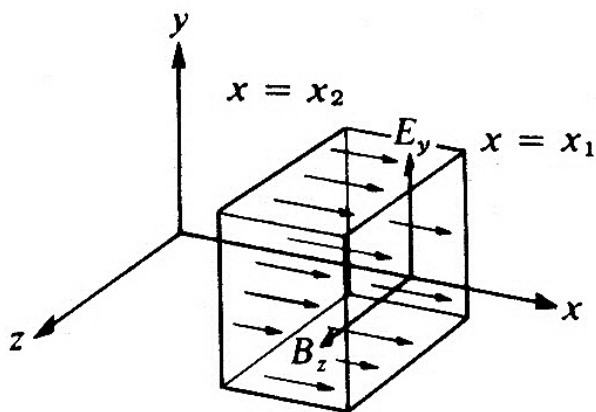
$$E_y = c B_z \quad (13.32)$$

3. Elektromagnetlainete energia ja Poyntingi vektor:

Uurime x -telje sihis piiramatult levivat EM tasalainet, mille korral kehtivast võrrandisüsteemist 13.31 saame, et

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (13.41)$$

Eeldame, et EM välja energia ruumtihedus avaldub kujul $u_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 B^2 / \mu_0$ ja kogu EM energia joonisel kujutatud risttahukas E_{EM} (Duffin'il U_{EM}) on selle suuruse integraal üle vaadeldava ruumala. Kiirus, millega EM välja energia väljub uuritavast risttahukast x -telje positiivses suunas läbi pinna $x = x_1$, avaldub kujul:



$$\begin{aligned}
 &= \int_{vol} \left[-\left(\frac{B_z}{\mu_0}\right) \frac{\partial B_z}{\partial t} - (\epsilon_0 E_y) \frac{\partial E_y}{\partial t} \right] dx dy dz = \\
 &= \int_{vol} \left[\left(\frac{B_z}{\mu_0}\right) \frac{\partial E_y}{\partial x} + \left(\frac{E_y}{\mu_0}\right) \frac{\partial B_z}{\partial x} \right] dx dy dz = \\
 &= \int_{vol} \frac{\partial}{\partial x} (E_y H_z) dx dy dz = \\
 &= \int_{surf} [(E_y H_z)_{x1} - (E_y H_z)_{x2}] dy dz.
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial E_{EM}}{\partial t} = \int_{vol} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E_y^2}{2} \right) dx dy dz =$$

Kolmandas reas on kasutatud seoseid 13.41 ja 13.29, neljandas korrutise tuletise valemit. Viimases reas on määratud integraal üle x -koordinaadi välja arvutatud, mille tulemusena integreerimine üle risttahuka ruumala asendub integreerimisega üle x -teljega ristuvate otsapindade. Saadud tulemusest järeldub, et antud näites piki x -telge suunatud vektor

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (13.42)$$

pikkusega $N_x = E_y H_z$ väljendab ajaühikus läbi EM lainete leviku suunaga ristuva ühikulise pinna kulgevat EM välja energiat. Vektorit $\mathbf{N}$ nimetatakse elektromagnetlainete energiavoo tiheduse vektoriks ehk **Poyntingi vektoriks**.

Üldistame saadud tulemust kolmemõõtmelisele juhule, mil uuritav ruumala võib sisaldada ka ainet. Eeldame, et laengukandjate suunatud liikumise kiiruse $\mathbf{v}$ korral tekitab voolutiheduse $\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$ uuritava ruumi igas punktis elektriväli $\mathbf{E}$, mille poolt ruumiühikus ja ajaühiku jooksul tehtav töö (vabanev energia) avaldub kujul $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$. See energia ise muundub soojuseks (hajub), aga tasakaalulises olukorras toob EM laine ajaühikus samapalju energiat juurde. Seega toob EM laine ajaühikus ruumalaühikusse energia $-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$. Selle energia avaldise saamiseks kasutame Maxwelli võrrandit

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \quad \text{millest} \quad \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D},$$

$$\begin{aligned}
 \text{ja matemaatilise füüsika valemit} \quad & \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \\
 \text{millest} \quad & \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).
 \end{aligned}$$

Ühtekokku siis:

$$-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}) = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - (-\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}) = -[\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ja kui asendame $\nabla \times \mathbf{E}$ EM induktiooni seaduse Maxwelli võrrandist, saame lõplikult

$$-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -[\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\left[\mathbf{H} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

ehk

$$-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

NB! Duffini õpiku originaalis on selles kohas trükiviga – vektorkorrutise asemel on lõpus skalaarkorrutis.

Kui integreerime saadud avaldist üle vaadeldava ruumala ja kasutame teadmist, et divergentsi integraal üle ruumala on voog

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S},$$

siis saame lõplikult

$$\int_V -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (13.43)$$

Võrrandi 13.43 vasak pool on vaadeldavas ruumiosas ajaühikus sisenev EM välja energia. Esimene integraal paremas pooles on EM välja energia kasvamise kiirus selles ruumiosas, kuna EM välja energia ruumtihedus on esitatav kujul:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{EM} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 \mu \mathbf{H}^2 + \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\mu_0 \mu 2 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \epsilon_0 \epsilon 2 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Järelikult peab teine integraal määrama EM välja energia uuritavast ruumiosast välja voolamise kiiruse ja vektor $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, mille voo määrab teine integraal, peab olema EM välja energiavoo tiheduse vektor $\mathbf{N}$ ehk Poyntingi vektor:

$$P_S = \oint_S \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} \quad (13.44)$$

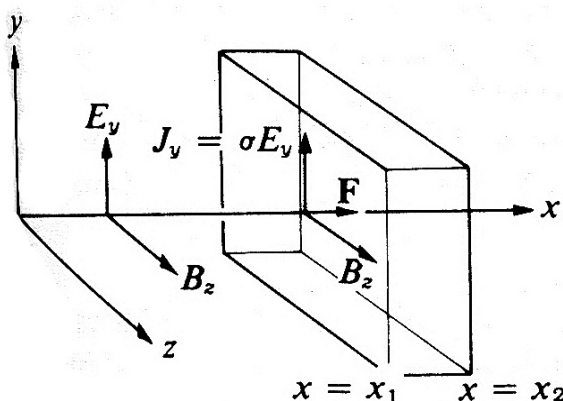
4. Elektromagnetlainete impulss ja kiirgusrõhk:

Eeldame, et x-telje suunas leviv EM tasalaine langeb risti elektrit juhtiva aine pinnale. Ruumala-elementis dV kulgevatele vooludele tihedusega $\mathbf{J}$ mõjub EM laine magnetvälja $\mathbf{B}$ poolt diferentsiaalne jõud

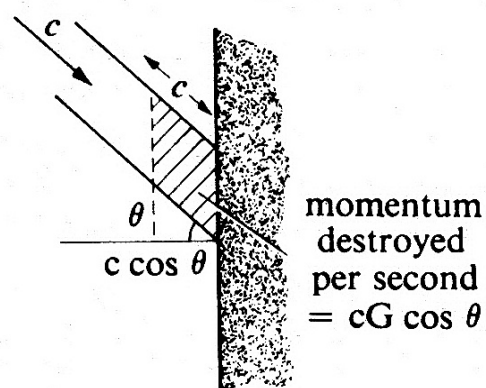
$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV.$$

See jõud on x-telje suunaline (vt joonist a) $dF_x = J_y B_z dx dy dz$ ja tekitab piki x-telge rõhu:

$$dp_x = J_y B_z dx \quad (13.45)$$



(a)



(b)

Et saada rõhu avaldist, mis sõltuks ainult väljavektorite komponentidest, kasutame Maxwelli võrrandit

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D},$$

mille y -komponent avaldub kujul: $\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$, kuna lainel $H_x = 0$.

Seega

$$J_y = -\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

ja 13.45 põhjal

$$dp_x = -\left(B_z \frac{\partial H_z}{\partial x} + \varepsilon_0 \varepsilon B_z \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) dx.$$

Teine liidetav dp_x avaldises on korrutise tuletise arvutuseeskirja

$$\frac{\partial}{\partial t} (B_z E_y) = B_z \frac{\partial E_y}{\partial t} + E_y \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

abil esitatav kujul

$$B_z \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B_z E_y) - E_y \frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Arvestame ka, et suuruse $B_z E_y$ ajalise tuletise keskvärtus üle piisavalt pika ajavahemiku võrdub nulliga, sest monokromaatses tasalaines on elektri- ja magnetväli omavahel faasis ning mõlema välja kasvu- ja kahanemisaegade summad on võrdsed. Samuti kasutame süsteemi 13.31.a teist võrrandit

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Seda kõike arvestades saame diferentsiaalse rõhu keskvärtuse jaoks avaldise

$$\langle dp_x \rangle = -\left[B_z \frac{\partial H_z}{\partial x} + \varepsilon_0 \varepsilon \left(-E_y \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \right] dx = -\left(B_z \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \varepsilon_0 \varepsilon E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) dx$$

ehk

$$\langle dp_x \rangle = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \right) dx = -\frac{\partial u_{\text{EM}}}{\partial x} dx.$$

Lõpliku paksusega risttahuka jaoks saame siis valemi

$$\langle p_x \rangle = \int_{x_2}^{x_1} -\frac{\partial u_{\text{EM}}}{\partial x} dx = \langle u_1 \rangle - \langle u_2 \rangle, \quad (13.46)$$

mille kohaselt mingis aines tekkiv EM lainete kiirgusrõhk võrdub EM välja energia ruumtiheduste vahega uuritava risttahuka otste vahel. Erijuhul, kui aine neelab EM lained täielikult, võrdub kiirgusrõhk lihtsalt ainele langeva EM lainevälja energia ruumtihedusega.

Eeldame nüüd, et ruumalaühikus sisalduv EM laine omab impulssi G . Kui laine levib edasi kiirusega c

$$G = \frac{u_{\text{EM}}}{c} \quad (13.47)$$