

Magnetostaatika (Duffin, 7. ptk)

Meeldetuletus püsimagnetite ja juhtmesüsteemide magnetvälja suuna kohta:

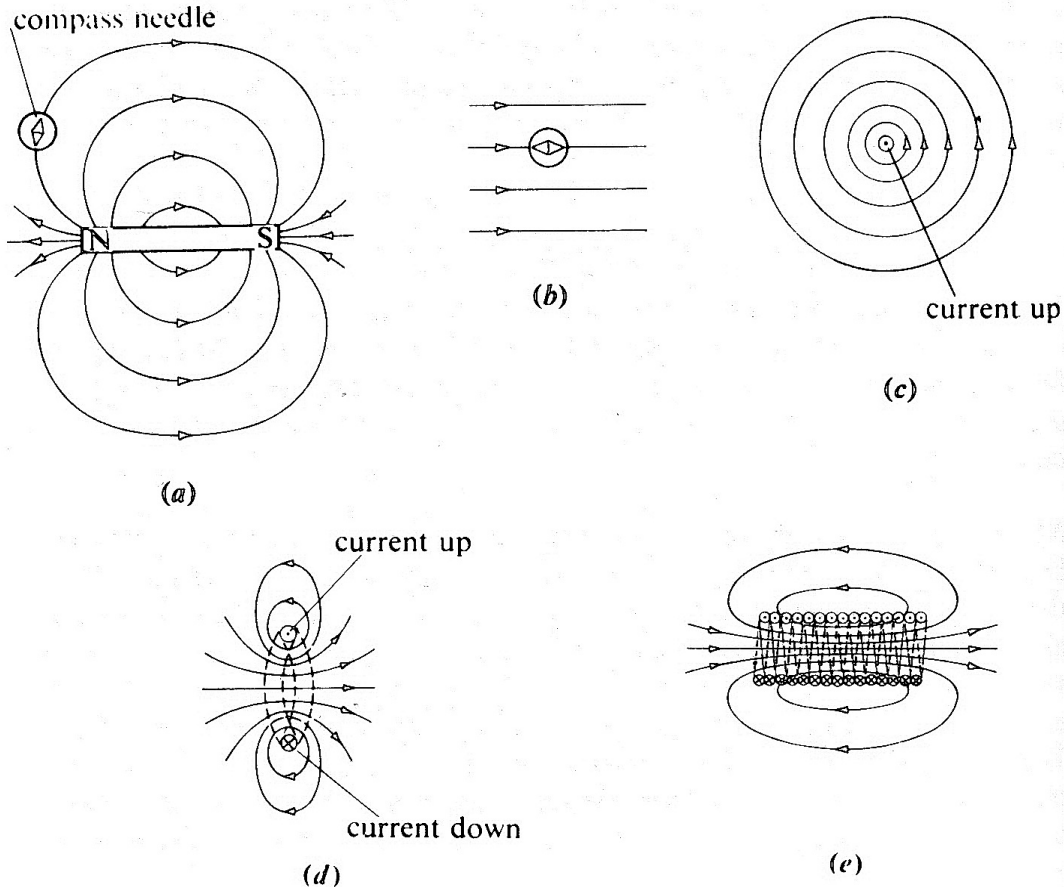
Magnetvälja jõujooned : a) väljaspool püsimagnetit

b) Maa magnetväljas

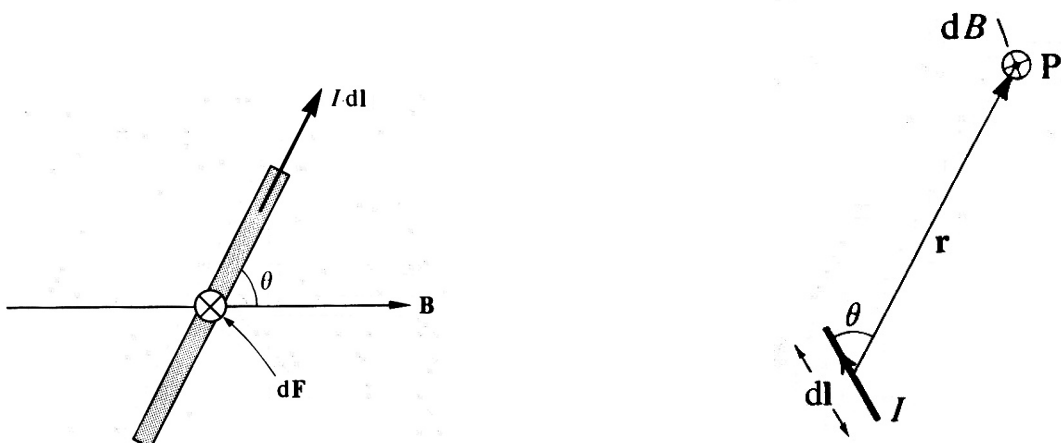
c) pika ja peenikese juhtme ümber

d) vooluga ringjuhtme läheduses

e) vooluga solenoidi (juhtmepooli) läheduses



Vooluelemendiks nimetatakse uuritavas juhtmes kulgeva voolu I ja juhtmelõigu diferentsiaalselt väikese pikkuse $d\mathbf{l}$ korrutist. Vooluelement on vektoriaalne suurus ja selle suund on määratud voolu suunaga juhtmes. Vooluelemendi magnetväli $d\mathbf{B}$ on määratud Biot-Savart'i seadusega (vt allpool) ning tema suund on määratud parema käe rusika reeglga. Vooluelement on elektrostaatikas kasutatava punktlaeu magnetostaatiline analoog. Vooluelemendi magnetväli $d\mathbf{B}$ on joonisel punktis P suunatud meist eemale.



Vooluelemendile $I d\mathbf{l}$ mõjub väljas magnetinduksiooniga $\mathbf{B}$ jõud

$$dF = B I dl \sin \theta. \quad (7.1)$$

Jõud mõjub risti selle tasandiga, milles paiknevad vektorid $d\mathbf{l}$ ja $\mathbf{B}$ (vt joonist vasakul ülal). Kasutades vektorkorrutist, saame kirjutada, et :

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (7.2)$$

Valemist (7.2) tuleneb, et magnetvälja (täpsemalt – *magnetinduksiooni*) SI ühik on $1 (\text{N} \cdot \text{s})/(\text{C} \cdot \text{m}) = 1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m})$ ehk üks **tesla** (1 T). Mõningates õpikutes kasutatakse CGSM süsteemi ühikut gauss (Gs). $1 \text{ Gs} = 10^{-4} \text{ T}$. Maa magnetvälja induksioon on ligikaudu pool gaussi (ca 50 mT), horisontaalkomponent Eestis ca 0,17 Gs (17 mT).

Jõud, mis mõjub terviklikule voolukontuurile L saadakse, kui summeeritakse kokku kõik “pisikesed jõud dF ’id”, mis saadakse valemist (7.2). Formaalselt saame seega kirjutada, et:

$$\mathbf{F} = I \oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (7.3)$$

Valemist (7.3) näeme, et uuritav vool I on pidev, kuna integreerimiskontuur L on kinnine. Kui aga vool on jaotunud üle kogu ruumala, siis peame kasutama voolutiheduse mõistet. **Voolutihedus** $\mathbf{J}$ näitab, kui suur laeng läbib ajaühikus juhtme ühikulise pindalaga ristlõiget

$$\mathbf{J} = \frac{d^2q}{dt dS} \mathbf{n}, \quad (\text{M.1})$$

kus $\mathbf{n}$ on voolu suunda näitav (juhtme ristlõikepinna normaali suunaline) ühikvektor. Seega voolutihedus on just see vektorsuurus, mille voog on voolutugevus.

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J_n dS = \int_S J dS \cos \beta \quad (\text{M.2})$$

Voolutiheduse mõõtühikuks on amper ruutmeetri kohta: $1 \text{ A}/\text{m}^2$. Praktikas kasutatakse rohkem ühikut $1 \text{ A}/\text{mm}^2 = 10^6 \text{ A}/\text{m}^2$. Kuna vooluelemendiga määratud juhtmelõigu ruumala on $dV = dl \cdot dS$, siis

$$\int_I I dl = \iint_{l,S} J_n dS dl = \int_V J dV, \quad (\text{M.3})$$

vooluelement omandab kuju $J dV$ ning summaarne jõud avaldub ruumintegraalina:

$$\mathbf{F} = \int_{\text{vol}} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \quad (7.4)$$

Biot’-Savart’i seadus magnetinduksiooni vektori pikkust $d\mathbf{B}$ väljendava seosena on vaakumi eeldusel ($\mu = 1$) esitatav kujul:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}, \quad (7.8)$$

või siis vektorkujul

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad (7.9)$$

Vastavalt on kogu kinnise juhtmekontuuri L poolt tekitatud magnetinduktsioon mingis punktis leitav voolutugevuse kaudu, integreerimisel üle kontuuri

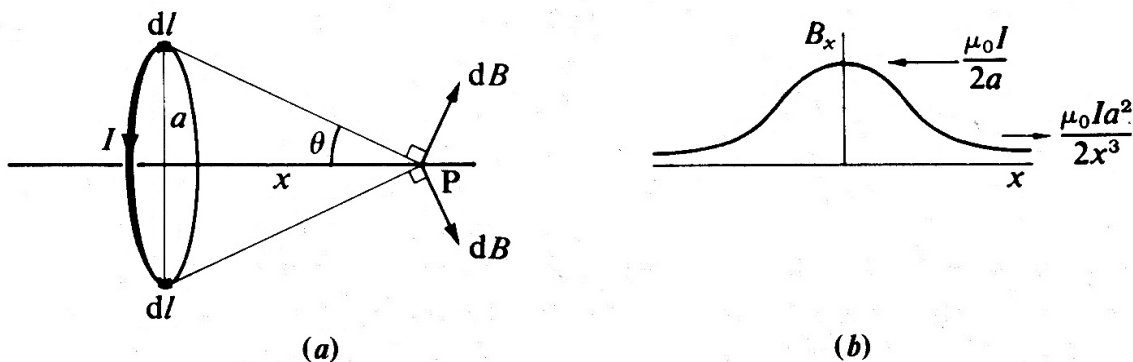
$$\mathbf{B} = \oint_L \mu_0 I d\mathbf{l} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad (7.11)$$

või voolutiheduse kaudu, integreerimisel üle ruumala:

$$\mathbf{B} = \int_V \frac{\mu_0 \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}} dV}{4\pi r^2} \quad (7.12)$$

Juhtmesüsteemide magnetväljad:

a) **ringvool** raadiusega a tekitab ringi teljel, kaugusel x ringi keskpunktist magnetvälja, mis on suunatud piki ringvoolu telge:



Selle välja magnetinduktsiooni võib esitada läbi kauguse R ringvoolu mistahes punkti ja uuritava väljapunkti P vahel, aga ka kasutades piki süsteemi telge mõõdetud kaugust x ringi keskpunktist uuritava väljapunktini:

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2 R^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (7.13)$$

Indeksiga x rõhutame, et see väli on alati suunatud piki süsteemi telge (siin: x -telge). Ringvoolu keskpunktis, kus $x = 0$ ja $R = a$, saame:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2a}. \quad (7.14)$$

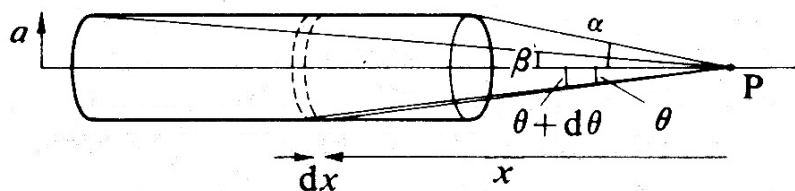
Aine magnetiliste omaduste kirjeldamisel tuleb ringvoolu poolt tekitatavat magnetvälja sageli kirjeldada läbi voolutugevuse ja kontuuri pindala korrutise $p_m = I S$, mida nimetatakse kontuuri **magnetmomendiks**. Vastavalt siis:

$$B_x = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 2 I S}{4\pi R^3} = \frac{\mu_0 2 p_m}{4\pi R^3} \quad (7.15)$$

b) **solenoid** ehk juhtmePOOL:

Vaatleme solenoidi, millel on N keerdu solenoidi üldise pikkuse L juures, seega $n = N/L$ keerdu pikkusühiku kohta. Eeldame, et need keerud paiknevad tihedalt üksteise kõrval. Suurust n nimetatakse sageli ka **keerdude tiheduseks**. Sellist solenoidi võib vaadelda koosnevana $N = n L$ koaksiaalsest juhtmePOOLIST. Pikkuse (x -telje) diferentsiaalsel lõigul dx paikneb juhtmePOOLIS ndx keerdu. Kui poolis kulgeb vool I , siis selle lõigu poolt punktis P tekitatud magnetinduktsioon avaldub valemi 7.13 põhjal järgmiselt:

$$dB_p = \frac{\mu_0 n dx I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n dx I a^2}{2r^3}.$$



Kuna $x = a \cot \theta$ (NB! Duffin'i õpikus $x = a \cos \theta$, mis on vigane) ning seega $dx = -a \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta = -a d\theta / \sin^2 \theta$ (Duffin'i originaalis on miinusmärk $a \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta$ ees puudu!), siis arvestades, et $a/r = \sin \theta$, saame

$$dB_p = -\frac{\mu_0 n I a^3}{2r^3 \sin^2 \theta} d\theta = -\frac{\mu_0 n I \sin^3 \theta}{2 \sin^2 \theta} d\theta = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \sin \theta d\theta$$

Integreerides kõik suurused dB_p kokku nurga θ väärtusest α kuni väärtuseni β , saame lõpliku pikkusega solenoidi magnetinduktsiooni valemi:

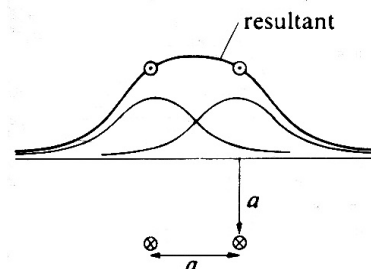
$$B_{sol} = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \beta - \cos \alpha) \quad (7.16)$$

Sellise solenoidi jaoks, mille pikkus on palju suurem kui ta raadius, saame solenoidi keskel, et $\alpha \rightarrow \pi$ ja $\beta \rightarrow 0$, seega $\cos \beta - \cos \alpha = 1 - (-1) = 2$ ning pika ja peenikese solenoidi magnetinduktsioon avaldub kujul:

$$B_{sol} = \mu_0 n I. \quad (7.17)$$

c) Helmholtzi poolid:

Uurime süsteemi, mis koosneb kahest ringikujulisest sama raadiusega juhtmepoolist, milles kulgeb sama tugevusega vool. Poolid asetsevad samal teljel (joonis a) ja nende magnetväljad liituvad. Juhtmepoolide vahel tekib ühtlane tugev magnetväli. Poolide vahekaugus valitakse selline, et süsteemi keskpunktist eemaldumisel kompenseeritakse ühe pooli magnetinduktsiooni vähenemine teise pooli magnetinduktsiooni suurenemisega. Nagu joonistelt b ja c näha, saavutatakse see ainult siis, kui ühe pooli magnetinduktsiooni muutus süsteemi keskpunktis on lineaarne ehk siis suurusel B_x on parajasti käänupunkt, tema teine tuletis on null ($d^2 B_x / dx^2 = 0$). Kasutades valemit (7.13), saame et see juhtub suuruse x väärtusel $0,5a$. Seega peaks poolide vahekaugus olema võrdne kummagi pooli raadiusega. Poole, mis on nii asetatud, nimetatakse Helmholtzi poolideks.



(a)

resultant 
separate fields at midpoint 

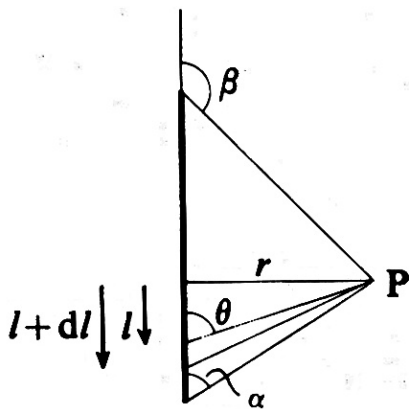
(b)

resultant 
separate fields at midpoint 

(c)

d) sirgjuhtme magnetväli:

Sirgjuhtme osa pikkusega dl kui vooluelement tekitab Biot'-Savart'i seaduse (7.8) põhjal diferentsiaalse magnetinduktsiooni dB .



See Duffini õpiku joonis oleks adekvaatne eeldusel, et vool kulgeb alt üles, seega ka vooluelemendi vektor $I d\mathbf{l}$ on suunatud ülespoole ($\uparrow$) ning nurk θ joonisel oleks Biot'-Savart'i seaduses sisalduv nurk vooluelemendi $I d\mathbf{l}$ ning väljapunkti kohavektori $\mathbf{r}$ (pikkusega r) vahel. Uuritava punkti P vähim kaugus sirgjuhtmest (või selle pikendusest), mis on siin joonisel tähistatud $\mathbf{r}$ -ga, tuleks hoopis tähistada z -ga, saavutamaks tähistuste kokkulangevust väljageomeetria konspektiga ja ühtlaselt laetud varde elektrivälja tugevuse valemitega (vt konspekti "E-vektor ja potentsiaal.pdf"). Nii tähistades: $z/r = \sin \theta$. Nurga θ diferentsiaalsele muutusele $d\theta$ vastav raadiust r omava ringjoone kaare element $ds = r d\theta$ tuleb ka seostada juhtme vastava diferentsiaalse lõiguga dl .

Lõik ds on nurga θ vastaskaatetiks täisnurkses kolmnurgas, mille hüpotenuusiks on dl . Seega $\sin \theta = ds/dl = r d\theta/dl$, millest $dl = r d\theta / \sin \theta$. Biot'-Savart'i seaduse põhjal

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \frac{r d\theta}{\sin \theta} = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r} \frac{d\theta}{z/r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \sin \theta d\theta.$$

Integreerides seda avaldist nurgast α kuni nurgani β ning arvestades, et $\sin \theta$ integraal on $-\cos \theta$, saame lõpliku pikkusega juhtmelõigu poolt tekitatava magnetinduktsiooni

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} (\cos \alpha - \cos \beta).$$

Kui on tegemist lõpmata pika juhtmega, siis $\alpha \rightarrow 0$ ja $\beta \rightarrow \pi$ (vt joonist) ning $\cos \alpha - \cos \beta \rightarrow 2$, mistõttu

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}. \quad (\text{Duffin'i õpiku valem 7.19})$$

Seega jõudsimme sirgjuhtme magnetinduktsiooni valemieni, milles Ampere'i seaduse võrdetegur $K = \mu_0/2\pi$ korrutatakse voolutugevusega I ning jagatakse uuritava punkti kaugusega juhtmest (siin z).

Kui meil on tegemist kahe vooluelemendiga $I_1 d\mathbf{l}_1$ ja $I_2 d\mathbf{l}_2$, kusjuures teise vooluelemendi kohavektor esimese suhtes on $\mathbf{r}_{12}$ ja selle vektori pikkus on r_{12} , siis võime valemeid 7.2 ja 7.9 kokku võttes avaldada jõu, millega esimene vooluelement mõjutab teist:

$$d^2 \mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{4\pi r_{12}^3} \quad (7.20)$$

See on elektrostaatikast tuntud Coulomb'i seadusele vastav magnetostaatiline põhiseadus. Kogu jõu, millega kaks kinnist kontuuri L_1 ja L_2 teineteist mõjutavad, saame valemi 7.20 integreerimise teel:

$$\mathbf{F}_{12} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2 d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{4\pi r_{12}^3} \quad (7.21)$$