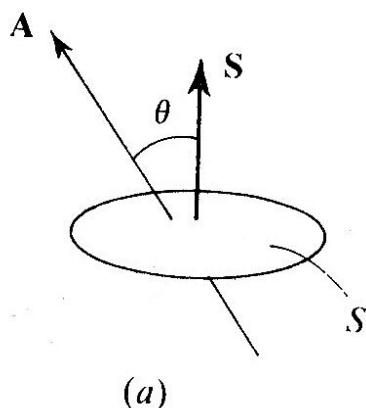


Gaussi teoreem ja selle rakendused (Duffin, 4.1, 4.2 ja 4.8)

1. Vektorvälja voo mõiste ja Gaussi teoreem:

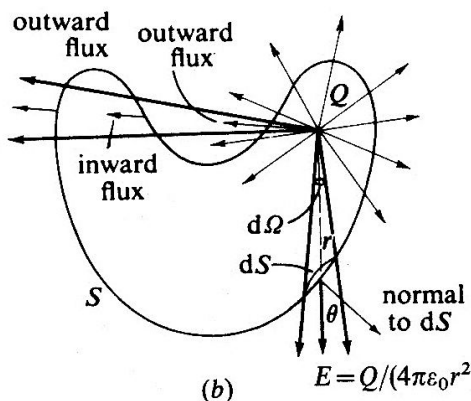


Vektorvälja voog on suurus, mis kirjeldab välja $\mathbf{A}$ jõujoonte läbimineku mingist pinnast pindalaga S .

Kui vaatleme seda pindala S pinna normaali suunalise vektorina $\mathbf{S}$, siis saame voo Φ esitada vektorite $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{S}$ skalaarkorrutisena:

$$\Phi = A S \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}.$$

Gaussi teoreemi tõestus E -vektori jaoks:



Läbi pinnatüki dS kinnisest pinnast väljuv E -vektori voog avaldub kujul

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q dS \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad \text{Suurus } \frac{dS \cos \theta}{r^2} \text{ on aga}$$

laengu Q asukohast lähtuv ja pinnatükile dS toetuv ruuminurk $d\Omega$. Seega muutub kõigi kinnist pinda S läbivate voogude liitmine ruuminurkade liitmiseks. Kuna suhe $Q/4\pi\epsilon_0$ on antud laengu korral konstant, siis võime ta tuua integraali märgi ette. Me jääme integreerima vaid ruuminurka. Tulemuseks on kogu- ehk totaalne ruuminurk punkti ümber, suurusega 4π .

Paiknegu punktlaeng Q kinnise pinna S sees (vt. joonist)

$$\text{Seega } \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{tot} \frac{Q d\Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Kui kinnise pinna sees paikneb palju laenguid, siis tuleb nad kõik algebraliselt liita. Positiivsed laengud põhjustavad positiivset ehk pinnast väljuvate jõujoonte voogu, negatiivsed laengud aga negatiivset, pinda sisenevat voogu. Lõpptulemusena saame E -vektori jaoks vaakumis **Gaussi teoreemi**: elektrivälja tugevuse voog vaakumis ($\epsilon = 1$) läbi kinnise pinna võrdub selle pinna poolt piiratud laengute algebralise summa ning elektrikonstandi suhtega:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Duffin, 4.2})$$

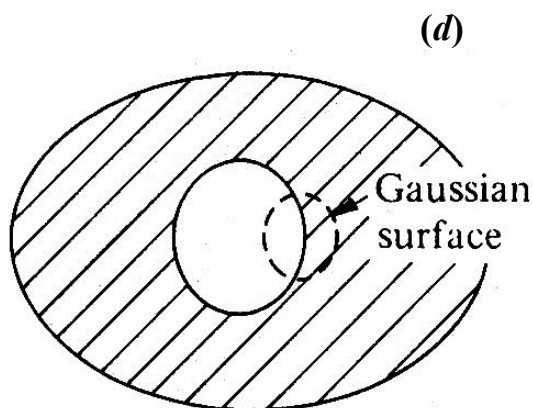
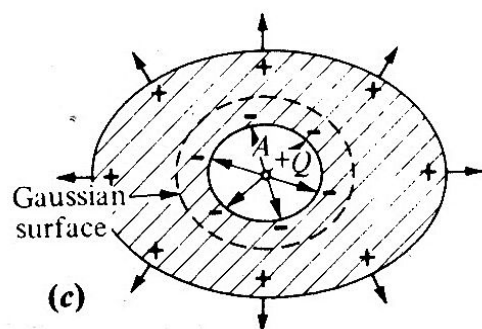
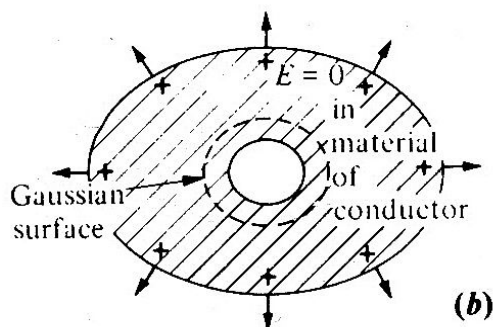
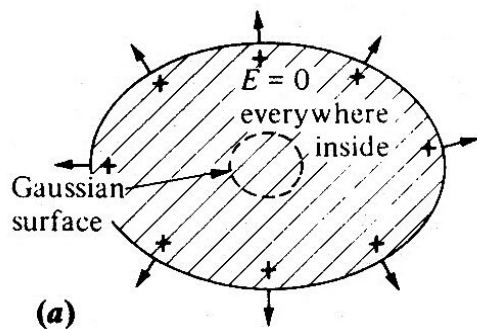
Kui arvestame, et laengud võivad paikneda ka aines ($\epsilon \neq 1$) ning kasutame elektrinihet $D = \epsilon_0 \epsilon E$, siis saame, et:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_V Q_c = \int_V \rho_c dV,$$

elektrinihe voog läbi kinnise pinna võrdub selle pinna poolt piiratud laengute algebralise summaga.

Siit selgub ka eelis, mida pakub elektrinihe mõiste kasutamine. Nimelt, Gaussi teoreem on elektrinihe abil formuleeritav oluliselt lühemini (13 sõna 18 asemel).

2. Gaussi teoreemi rakendused:

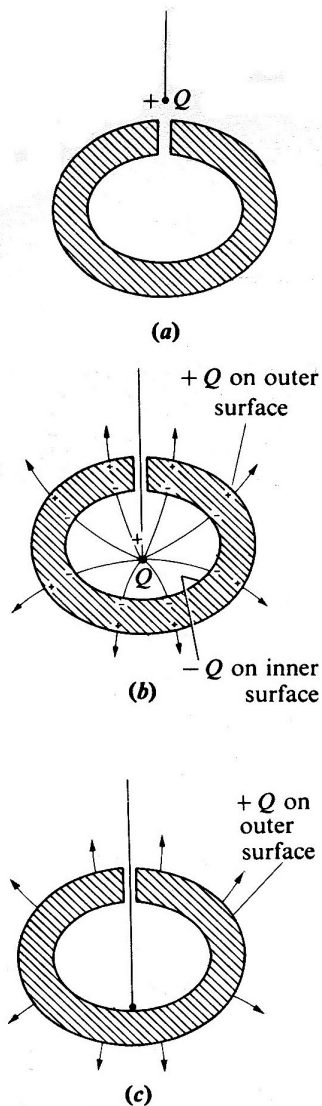


Joonis (a): Juhtivale kehale antud laeng jaotub samanimeliste laengute tõukumise tulemusena keha pinnale. Keha sees valitud mistahes kinnise pinna ehk Gaussi pinna (*Gaussian surface*) poolt piiratud ruumalas laenguid ei paikne. Seetõttu ei läbi valitud pinda ka elektrinihke või väljatugevuse voog ning järelikult on elektrivälja tugevus sellise pinna punktides null.

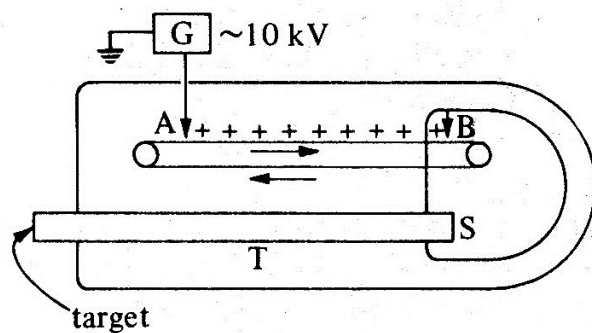
Joonis (b): Analoogiliselt on elektrivälja tugevus null ka juhul, kui valitud pinna sees paikneb õõnsus. Juhtiva aine kihiga kaetud õõnsuses on elektrivälja tugevus null isegi juhul, kui juhtivale katele on antud laeng (meenutagem katset Faraday puuriga).

Joonis (c): Kui algselt neutraalse juhtiva keha sees paiknevasse õõnsusesse viia laeng $+Q$, siis indutseeritakse sama suur negatiivne laeng $-Q$ sisepinnale ning positiivne laeng $+Q$ keha välispinnale. Sisemise ja välimise laetud kihi vahel paiknevat kinnist Gaussi pinda ei läbi elektrinihke voog, sest pinna sees paiknevate laengute algebraline summa on null. Järelikult on elektrivälja tugevus mistahes sellise pinna punktides null. Juhtiva keha sees ei ole elektrivälja.

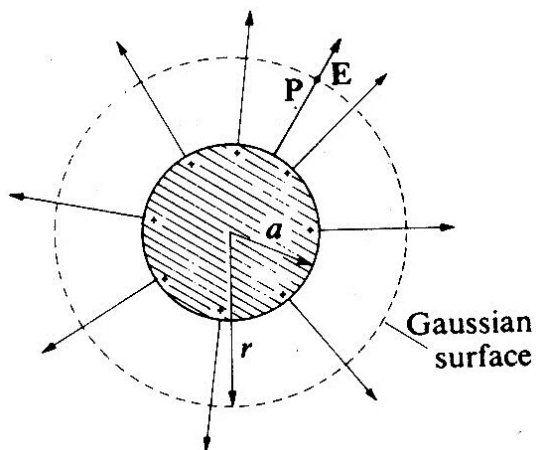
Joonis (d): Kui valime Gaussi pinna õõnsust omava ning tervikuna neutraalse juhtiva keha sees nii, et Gaussi pinna sisse jääb osa keha ja ka osa õõnsust, siis Gaussi pinda läbivate elektrivälja jõujoonte puudumise tõttu ei paikne õõnsuse pinnal laengut. See on Gaussi teoreemi rakendamine tagurpidi: kui pole ei elektrivälja tugevuse ega elektrinihke voogu läbi pinna, siis ei saa olla ka laengut pinna sees.



Seest õõnsat juhtivat keha saab laadida, viies kehale lisatava laengu $+Q$ mittejuhtiva hoidja otsas läbi väikese ava õõnsuse sisse. Niipea kui lisalaeng on jõudnud õõnsuse sisse, hakkab ta indutseerima õõnsuse pinnale laengut $-Q$. Kuna selle indutseeritud laengu $-Q$ ja lisatava laengu $+Q$ vahel tekib tõmbejõud, siis on lihtne viia lisalaeng kontakti õõnsuse pinnaga, mispeale lisalaeng jaotub ühtlaselt juhtiva keha välispinnale. Nii võib vähehaaval laengut juurde tuua ka kehale, millel juba paikneb suur laeng. Seda võimalust kasutatakse Van de Graaffi generaatoris (vt joonist allpool).



Van de Graaffi generaatori põhiosaks on võllidel A ja B noolte suunas liikuv mittejuhtiv rihm, mille pinnale punktis A antakse 10 kV alalispinge generaatorist laeng. Rihm toimetab selle laengu juhtivas kehas paiknevasse õõnsusesse, kus laeng punktis B rihma pealt ära korjatakse ning juhtiva keha välispinnale koguneb. Tähe 4 demokabinetis paikneva Van de Graaffi generaatoriga saab Maa suhtes tekitada pingesid 0,2-0,3 MV, parimad Van de Graaffi generaatorid tekitavad pingesid kuni 20 MV.



Vaatleme juhtivast ainekst koosnevat homogeenst kera raadiusega a . Paiknagu keral laeng $+Q$. Leiame elektrivälja tugevuse E punktis P, mis paikneb kera tsentrist kaugusel r . Kui ümbritseme kera sfäärilise Gaussi pinnaga, mille raadius on r , siis jääb laeng $+Q$ tervikuna selle pinna sisse ja olukord on tsentraalsümmeetriline. Gaussi teoreemi põhjal on elektrinihke või väljatugevuse voog läbi valitud sfäärilise pinna täpselt samasugune nagu ta oleks juhul, mil laeng $+Q$ paikneks punktlaenguna sfääri tsentris.

Järelikult avaldub elektrivälja tugevus punktis P punktlaengu juhule analoogilise valemiga

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.3)$$

ja potentsiaal φ või V valemiga:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.4)$$

Siit järeldub kohe, et niisuguse laetud kera pinnal ($r = a$) avaldub elektrivälja potentsiaal kujul

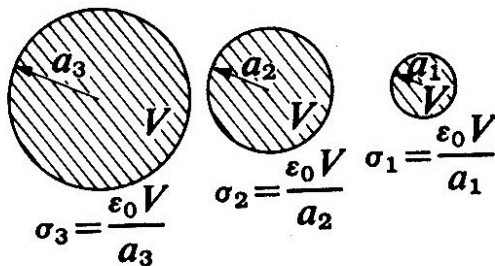
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (4.5)$$

Juhtiva kera pinnalaengu poolt tekitatava elektrivälja tugevus E_{pind} on esitatav laengu pindtiheduse σ kaudu, mis avaldub keral paikneva laengu Q ja kera (sfääri) pindala $4\pi a^2$ suhtena. Seega on uuritav elektrivälja tugevus laengu pindtiheduse ja elektri konstandi suhe:

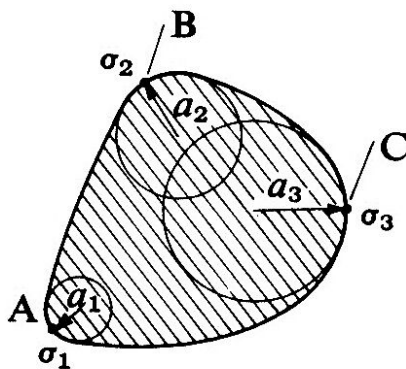
$$E_{pind} = \frac{Q}{4\pi a^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4.6)$$

Pinnalaengu elektrivälja potentsiaali saame väljatugevuse korrutamisel kera raadiusega a :

$$V_{pind} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{a\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4.7)$$

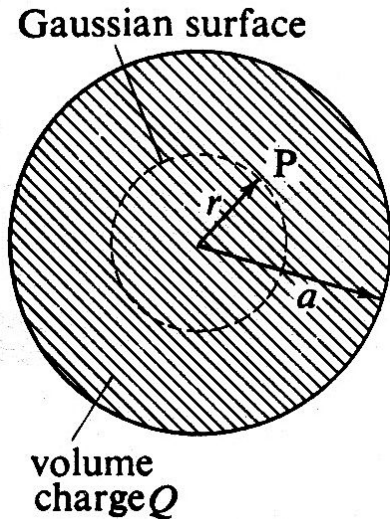


(a)



(b)

Vaatleme nüüd kolme ühesugusest juhtivast ainest kera, millel on erinevad raadiused (a_1, a_2, a_3), kuid sama potentsiaal V . Avaldades valemist 4.7 pinnalaengu pindtiheduse σ , näeme et see peab olema seda suurem, mida väiksem on vastava kera raadius (joonis a). Kui nüüd need samad kerad kuuluvad ühe ja sellesama ebakorrapärase kujuga keha koostisesse, siis ongi neil kõigil sama potentsiaal, sest juhi pind on ekvipotentsiaalpind (joonis b). Seega läheb laengu pindtihedus teraviku piirkonnas lokaalselt suureks. Laeng koguneb teravikele. Mõistagi tekib seetõttu teravike ümber lokaalselt tugev elektriväli.



Uurime laetud sfääri raadiusega a ja vastavalt ruumalaga $(4/3)\pi a^3$, milles ühtlaselt paikneb laeng Q . Valime selle sfääri sees Gaussi pinnana teise sfääri, mille raadius $r < a$. Kui elektrivälja tugevus sisemise sfääri suvalises punktis P on E , siis läbib sisemise sfääri pinda elektrivälja tugevuse voog $4\pi r^2 E$. Kuna sisemise sfääri ruumala on $(4/3)\pi r^3$, siis paikneb sisemise sfääri sees laeng $Q (4/3)\pi r^3 / (4/3)\pi a^3$, seega $Q r^3/a^3$.

Gaussi teoreemi põhjal saame siit $4\pi r^2 E = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 a^3}$, millest $E = \frac{Q r}{4\pi \epsilon_0 a^3}$. (4.8)

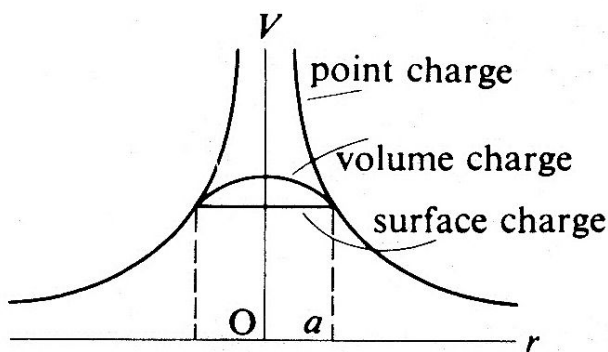
Potentsiaali sõltuvuse kaugusest r leiame väljatugevuse integreerimise teel, arvestades et väljaspool laetud kera avaldub väljatugevus valemiga (4.3) ja kera sees valemiga (4.8).

Loeme potentsiaali kerast lõpmata kaugel nulliks. Neil eeldustel saame, et

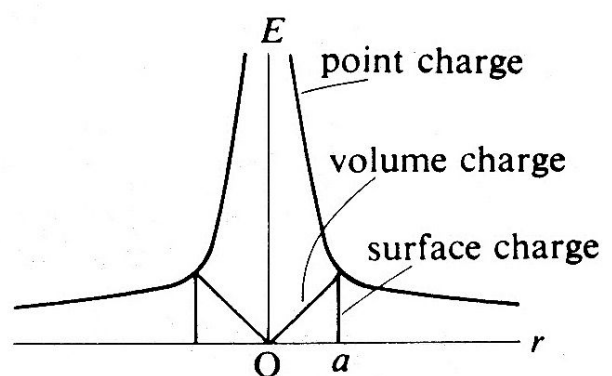
$$V(r) = \int_{\infty}^r -E dx = \int_{\infty}^a -\frac{Q dx}{4\pi \epsilon_0 x^2} + \int_a^r -\frac{Q x dx}{4\pi \epsilon_0 a^3} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^3} \frac{a^2}{2} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^3} \frac{r^2}{2} = \frac{2Q}{8\pi \epsilon_0 a} + \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 a} - \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 a} \frac{r^2}{a^2}$$

ja seega

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (4.9)$$



(a)

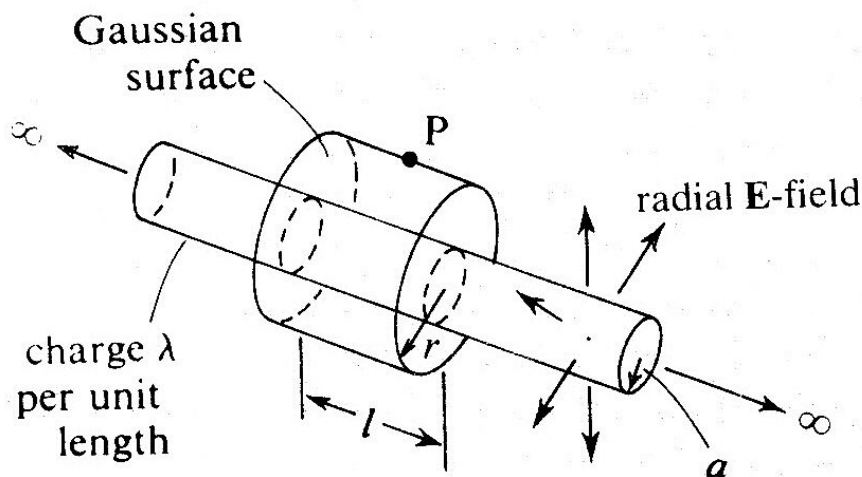


(b)

Joonisel (a) on sfäärilise sümmeetriaga elektriväljas toodud potentsiaali V ning joonisel (b) elektrivälja tugevuse E sõltuvus kaugusest r sfääri tsentri ja vaadeldava väljapunkti vahel. Juhul $r > a$ on potentsiaal alati määratud punktlaengu (*point charge*) jaoks kehtiva valemiga (4.4), mis reaalses punktlaengu väljas kehtib ka $r < a$ korral. Ruumlaengu (*volume charge*)

potentsiaal kirjeldub juhul $r < a$ valemiga (4.9) ning pinnalaengu (*surface charge*) korral on potentsiaal juhul $r < a$ konstantne, sest juhtiva kera pind on ekvipotentsiaalpind. Väljatugevuse käitumist kirjeldavad analoogiliselt valemid (4.3) punktlaengu ning (4.9) ruumlaengu juhul. Juhtiva kera sees ($r < a$) on aga väljatugevus alati null, mistõttu pinnalaengu väljatugevus langeb punktis $r = a$ nulli.

Arvutame ka potentsiaali lõpmatu juhtiva silindri **radiaalse elektrivälja** jaoks, eeldusel et laengu joontihedus on λ .



Olgu lõpmatu ja ühtlaselt laetud silindri raadius a ning uuritav väljapunkt P paiknegu kaugusel r silindri teljest. Elektrivälja tugevuse voog läbi pikkust l omava silindrilise Gaussi pinna võrdub vooga ainult läbi külgpinna $2\pi r l E$, sest voog läbi otsapindade on null, kuna elektrivälja jõujooned on otsapindadega paralleelsed. Seega Gaussi teoreemi põhjal

$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}, \quad \text{millest} \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (4.10)$$

Potentsiaali sõltuvuse kaugusest r leiame jällegi integreerimise teel, lugedes potentsiaali nulltasemeks laetud silindri pinna ($r = a$):

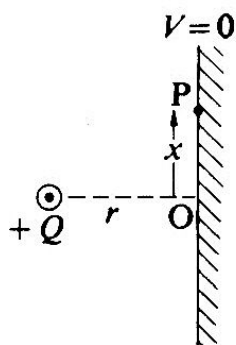
$$V(r) = \int_a^r -E \, dx = \int_a^r -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \, dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{r}\right).$$

Üldjuhul peaksime sisse tooma konstandi C , mille väärtus on määratud potentsiaali nulltasemega. Potentsiaal avaldub selle abil valemiga:

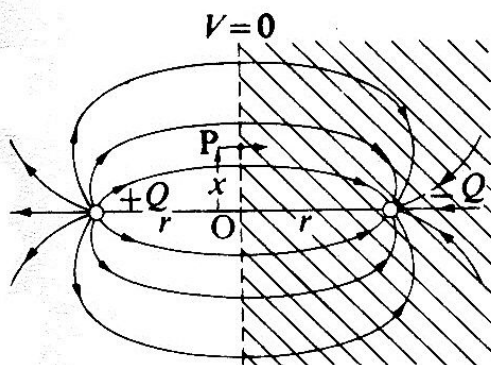
$$V(r) = C - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \quad (4.11)$$

3. Peegelkujutiste meetod.

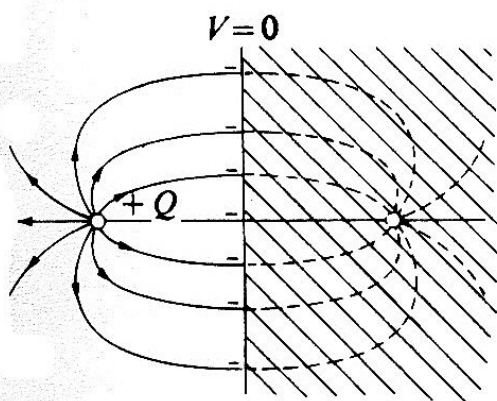
Peegelkujutiste meetod võimaldab kergesti leida laengu pindtihedust mingil juhtival pinnal, kui see pind ühtib ekvipotentsiaalpinnaga, mille asukoha me oleme määranud mingis varem lahendatud ülesandes.



(a)



(b)



(c)

Paiknegu punktlaeng $+Q$ kaugusel r lõpmatust juhtivast tasandist, mille potentsiaali me võime lugeda võrdseks nulliga (joonis *a*). Laengu asukohast tasandi poole suunatud ja tasandiga ristuva joone QO ümber tekib telgsümmeetria. See tähendab, et laengu pindtihedus σ ja väljatugevus punktis P on samad nagu igas teises punktiski, mis on samal kaugusel x tasandil paiknevast sümmeetriakeskmest O. Täheldame, et tekkiva elektrivälja jõujooned on täpselt sama kujuga nagu sellel väljal, mis tekib joonisel *b* punktlaengu $+Q$ ja tema peegelkujutise $-Q$ vahel. Seejuures nende kahe punktlaengu ühenduslõiku poolitav ja selle lõiguga ristuv tasand, mille peale jääb ka uuritav punkt P, on ekvipotentsiaalpind, mille kõigis punktides potentsiaal võrdub nulliga. Tegelikult indutseerib punktlaeng $+Q$ tõepoolest tasandi pinnale summaarse laengu $-Q$, mis pinda mööda jaotudes (joonis *c*) tekitabki punktist O kaugusel x laengu pindtiheduse $\sigma(x) = \sigma_P$. Kahest punktlaengust $+Q$ ja $-Q$ koosneva süsteemi välja-tugevus punktis P on leitav väljatugevuste superpositsioonist:

$$E_P = \frac{2Qr}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

ja seega otsitav laengu pindtihedus:

$$\sigma_P = \epsilon_0 E_P = -\frac{2Qr}{4\pi(r^2 + x^2)^{3/2}}.$$