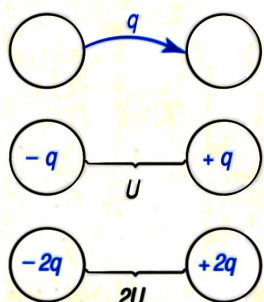


Elektrimahtuvus ja elektrivälja energia (Duffin, 5. ptk)

Gümnaasiumiõpik: (valemid G.1, G.2 jne)

Kallates vedelikku ühekõrgustesse kuid erineva läbimõõduga klaasidesse, näeme otsekohe, et laiemasse klaasi mahub rohkem vedelikku. Suurema läbimõõduga anumal on suurem põhja pindala ja seega ka ruumala. Samamoodi on lood erinevate elektrit juhtivate kehade laadimisel. Ühele kehale “mahub” rohkem laengut kui teisele. Järelikult on mõtet võtta kasutusele keha laadumisvõimet kirjeldav suurus, mida nime-tatakse keha mahtuvuseks. Rangelt võttes on mahtuvus alati kahe keha omavaheline mahtuvus. Andes ühele kehale mingi laengu, peame selle mingilt teiselt kehalt ära võtma, kuna kehtib laengu jäävuse seadus.



J. 2.54. Pinge tekkimine kahe keha vahel laengu q viimisel ühelt kehalt teisele.

Vaatleme kahte algselt neutraalset keha. Kui me võtame ühelt kehalt ära laengu q ja anname selle teisele kehale, siis omandab esimene keha laengu $-q$ ja teine $+q$. Kehade vahel tekib elektriväli ja seega ka potentsiaalide vahe (pinge) U (J. 2.54). Kuna potentsiaal φ on võrdeline teda tekitava laenguga q (valem $\varphi = k q/r$), siis teostades sama toimingut laenguga $2q$, tekitame kehade vahel pinge $2U$. Peagi märkame, et laengu ja pinge jagatis jääb kõigis sellelaadsetes katsetes muutumatuks, antud kehade süsteemi iseloomustavaks suuruseks. See ongi vaadeldavate kehade omavaheline mahtuvus.

Kahe keha **omavaheline mahtuvus** näitab, kui suure laengu Q viimisel ühelt kehalt teisele tekib kehade vahel ühikuline pinge. Mahtuvuse C leidmiseks tuleb üle viidud laeng Q jagada tekkiva pingega

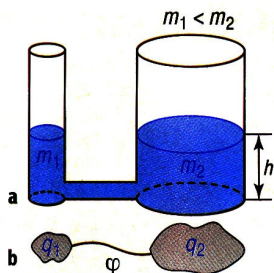
$$C = \frac{Q}{U}. \quad (G.1)$$

Rõhutamaks ajalise muutuse tähtsust võib üleviidavat laengut Q vaadelda keha laengu lõppväärtuse q_2 ja algväärtuse q_1 vahena: $Q = q_2 - q_1 = \Delta q$. Siis on keha iseloomustav laeng q meile mehaanikast tuntud koordinaadi rollis ja üleviidav laeng Q vastab kahe koordinaadi vahele ehk teepikkusele. Vaadeldes keha laengut ajast sõltuva suurusena $q = q(t)$, peame ajast sõltuvana käsitlema ka kahe keha vahel tekkivat pinget $u = u(t)$. Niimoodi võtab kahe keha omavahelise mahtuvuse definitsioon kuju

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta u}. \quad (G.2)$$

Tinglikult võib rääkida ka ühe keha mahtuvusest. Sel juhul eeldatakse, et teine asjaosaline keha ei mõjuta esimese keha läheduses asetleidvaid nähtusi. Ühe juhtiva keha laadimisel omandavad kõik keha punktid mingi ühesuguse potentsiaali. Seda nimetatakse keha potentsiaaliks. Vastavalt näitab **ühe keha mahtuvus**, kui suur on keha laengu see muutus Δq , millega kaasneb keha potentsiaali φ ühikuline muutus

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi}. \quad (G.3)$$



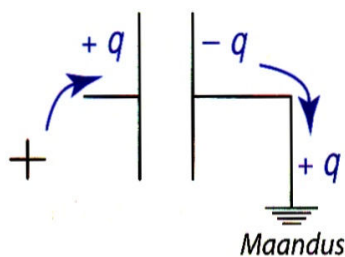
J. 2.55. Ühendatud anumad (a) – vedeliku taseme kõrgus h sama, vedeliku kogus (mass m) erinev, ühendatud juhid (b) – potentsiaal φ sama, laeng q erinev.

Mitmest kehast koosneva ja elektrit juhtiva süsteemi laadimisel saavad süsteemi kõik osad ühesuguse potentsiaali juurdekasvu $\Delta\varphi$. Laeng aga ei jaotu kehade vahel võrdselt, vaid suurema mahtuvusega keha omandab valemi G.3 kohaselt ka suurema laengu. Seega sarnaneb elektri juhtivate süsteemi laadimine vee kallamisega ühendatud anumatesse (J. 2.55). Veetase tõuseb kõigis anumates ühepalju, lai anum aga võtab vastu rohkem vett kui kitsas.

Nüüd saab meile selgeks elektriseadmete **kaitsemaanduse** põhimõtte. Maandamisel ühendatakse seadme metallkorpus juhtme abil Maaga. See kaitseb seadme kasutajat elektrilöögi eest juhul, kui seadme korpus satub rikke tagajärjel Maa suhtes pingele alla. Kaitsemaandus juhib seadme korpusele sattunud laengu ära Maasse. Maa on aga niivõrd suure mahtuvusega keha, et talle võib anda kuitahes suure laengu, ilma et tema potentsiaal märgatavalt muutuks. Laeng liigub Maasse läbi maandusjuhtme, mitte aga läbi seadme kasutaja keha. Seega on mingi keha maandamine samaväärne suure augu tegemisega niisuguse anuma põhja, millesse vesi mitte mingil juhul koguneda ei tohi. Kui ka vesi eksikombel satub anumasse, jookseb vesi läbi augu otsekohe maha.

Kehade süsteemi, mis on loodud mingi kindla mahtuvuse saamiseks, nimetatakse **kondensaatoriks**.

Lihtsaim kondensaator koosneb kahest elektrit juhtivast plaadist ehk katest, mille vahel paikneb dielektrikukiht. Kondensaatori mahtuvus näitab, kui suure laengu q andmisel ühele plaadile suureneb plaatidevaheline pinge U ühe ühiku võrra. Seega on kondensaatori mahtuvus sisuliselt tema plaatide omavaheline mahtuvus (valem G.1 või G.2).



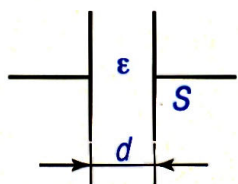
J. 2.57. Laengu $-q$ indutseerimine kondensaatori maandatud plaadile.

Kondensaatori laadimiseks reeglina ei võeta laengut ühelt plaadilt, et anda seda teisele plaadile. Piisab vaid ühe plaadi laadimisest. Laetud plaadi elektrivälja mõjul hakkavad laengukandjad teisel plaadil ja sellega ühendatud juhtides liikuma. Näiteks laengu $+q$ andmisel kondensaatori ühele plaadile omandab teine (algselt neutraalne) plaat sama suure laengu $-q$, sest just siis tasakaalustavad plaatide elektriväljad väljaspool kondensaatorit vastastikku teineteist. Samanimeliste laengute tõukumise tõttu lahkub laeng $+q$ teiselt plaadilt. Laengu $-q$ saab kergesti teisele plaadile tuua siis, kui plaat on maandatud (J. 2.57) ja laeng $+q$ võib lahkuda Maasse. Aga ka vooluringis paikneva kondensaatori korral saab laeng teiselt plaadilt alati ära minna. Järelikult on ühe plaadi laadimine samaväärne laengu q üleviimisega ühelt plaadilt teisele.

Mahtuvuse ühik SI-süsteemis kannab Michael Faraday auks nime *farad*. Üks farad (1 F) on sellise keha mahtuvus, millele tuleb anda laeng üks kulon, selleks et suurendada tema potentsiaali ühe voldi võrra. Kondensaatori mahtuvus on 1 F, kui laengu 1 C viimine ühelt plaadilt teisele tekitab plaatide vahel pinget 1 V. Seega

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}.$$

Kuna üks kulon on väga suur laeng, siis ka üks farad on väga suur mahtuvus. Seetõttu kasutatakse praktikas enamasti mikro-, nano- ja pikofaradeid ($1 \text{ F} = 10^{-6} \text{ F}$, $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$, $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$).



J. 2.58. Plaatkondensaatori mahtuvust määravad suurused.

Mahtuvus sõltub vaadeldavate kehade mõõtmetest, vahekaugusest ja kehadevahelise aine dielektrilisest läbitavusest. Leiame kahest tasaparalleelsest plaadist koosneva kondensaatori mahtuvuse (J. 2.58), lähtudes väljatugevuse avaldisest:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S},$$

kus q on ühe plaadi laeng, S - plaadi pindala ja ϵ - plaatide vahel paikneva aine dielektriline läbitavus.

Seega

$$q = \epsilon_0 \epsilon S E.$$

Pinge U plaatide vahel avaldub kujul

$$U = E d,$$

kus d on plaatidevaheline kaugus. Järelikult mahtuvus

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S E}{E d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}. \quad (\text{G.4})$$

Valemist G.4 tuleneb elektrikonstandi ϵ_0 enamlevinud mõõtühik **farad meetri kohta** (1 F/m). See on identne suuruse ϵ_0 Coulomb'i seaduse põhjal saadud ühikuga $1 \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$.

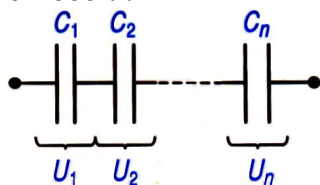
Kondensaatorite kasutamine: Kondensaator täidab vooluringis sama rolli, mis paak veetorustikus. Kondensaatorit kasutatakse voolu ühtlustava seadmena. Kui laetud osakesed mingil põhjusel kondensaatori juures kogunevad, siis salvestab kondensaator laengu, vastupidisel juhul aga annab seda ära. Nii töötab kondensaator **alaldis**. Elektroonikas leiab aga peamiselt kasutamist kondensaatori võime mitte juhtida alalist voolu, kuid lasta läbi vahelduvat. Kondensaator on vajalik ka **võnkeringis**, mille abil saame kõikvõimalike raadio- või telesaatejaamade elektromagnetlainete hulgast välja valida just need, mis kannavad meile huvi pakkuvat programmi.

Laialt on levinud **mikrofon**, milles sisaldub kondensaator. Sel juhul on kondensaatori üheks plaadiks õhuke metallkile, mis hakkab helilainete mõjul võnkuma. Võnkumisel muutub plaatide vahekaugus ja valemi G.4 kohaselt ka kondensaatori mahtuvus. Konstantsel pingel kaasneb mahtuvuse muutumisega valemi G.2 põhjal laengu muutus. Järelikult peab vooluallikat ja kondensaatorit sisaldavas ahelas tekkima elektrivool. Sellega on helivõnkumised muudetud elektrilisteks võnkumisteks.

Mahtuvuse muutmisel põhineb enamasti ka **arvuti klaviatuuri** töö. Vajutades klahvile, suurendame klahvi taga paikneva kondensaatori mahtuvust ja kutsume nii esile vooluimpulsi. Mahtuvusliku lüliti eeliseks on asjaolu, et temas ei toimu metalloosade vahetut kontakti. Seega jääb ära metalli oksüdeerumise või kulumise mõju lüliti tööle.

Kondensaatori ehitus sõltub tema otstarbest. Kui on vaja muutumatut ja mitte eriti suurt mahtuvust, siis kasutatakse **paberkondensaatorit**, mille kateteks on metallfooliumi lehed ning dielektrikuks parafiinis immutatud paber. Fooliumi- ja paberiribad on tihedasti kokku rullitud, mistõttu paberkondensaatoril on reeglina silindriline kuju. Suurema mahtuvusega on **elektrolüüt-kondensaator**, sest tema katete vahekaugus on väga väike. Üheks katteks on jällegi metallfoolium, dielektrikuks aga tema pinnal moodustunud oksiidikiht. Teiseks katteks on paberileht, mis on muudetud juhtivaks ioone sisaldavas lahuses immutamise teel. Ka elektrolüüt-kondensaatorid on silindrilised. Neid tohib pingestada vaid ühes suunas. Seetõttu on pinge lubatud polaarsus alati tähistatud ka nende korpusel (märgid $+$ ja $-$). Kõrge pinge korral tuleb kasutada kondensaatorit, mille plaadid paiknevad õlis. Selline kondensaator on oma väliskujult kandiline metallkarp. Vanaaegse raadio häälestusnupu taga paikneb muudetava mahtuvusega **pöördkondensaator**. Ta koosneb kahest metallplaadistikust, mille plaate saab pöörata üksteise vahele. Mida suurem on kohakuti paiknevate plaadiosade pindala, seda suurem on ka niisuguse kondensaatori mahtuvus. Kaasaegne elektroonikatööstus kasutab muudetava mahtuvusega kondensaatorite valmistamiseks pooljuhte. Dielektrikuna töötab sel juhul pooljuhituki laengukandjatest tühjenenud osa, mille paksust ja järelikult ka detaili mahtuvust saab muuta pinge reguleerimise teel. Niisugust seadet nimetatakse **varikapiks** (ingl. k. *variable capacity* - muudetav mahtuvus). Kaasajal on kondensaatori tähtsaks rakenduseks muutunud **arvuti mälupulk**. Iga bitti infot mälupulgal kannab imepisike kondensaator. Kui see kondensaator on laetud, siis on bitis salvestatud kahendsüsteemi arv 1, laadimata kondensaatori korral aga arv 0.

Vajaliku kogumahtuvuse saamiseks võib kondensaatoreid mahtuvustega $C_1, C_2, \dots, C_n$ ühendada jadamisi või rööbiti.



Jadaühendusel (J. 2.59) võrdub kondensaatoripatarei kogupinge U_j üksikutel kondensaatoritel tekkivate pingete summaga. Pingete liitumine tuleneb valemi

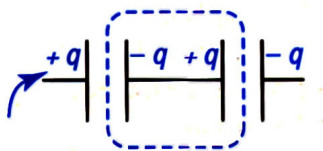
$$U = E d$$

kohaselt pikkuste liitumisest. Seega

$$U_j = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

J. 2.59. Kondensaatorite jadaühendus.

Laeng q on aga kõigil kondensaatoritel sama (ühel plaadil $+q$ ja teisel $-q$), sest mingi laengu tekitamisel elektrivälja abil algselt neutraalse juhtiva keha ühele küljele või otsale, ilmub niisama suur, vastupidise märgiga laeng ka juhi teisele küljele (laengu jäävuse seadus).



J. 2.60. Järjestikune laengu indutseerimine kondensaatorite jadaühendusel.

Praegusel juhul on selleks juhiks ühe kondensaatori vasakpoolsest ja teise parempoolsest plaadist koosnev süsteem (J. 2.60). Avaldades pinge U laengu Q ja mahtuvuse C kaudu valemist 2.13, saame

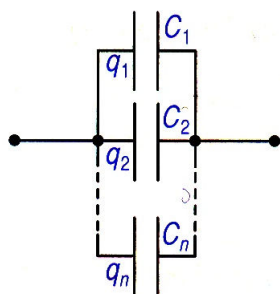
$$\frac{q}{C_j} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n},$$

millest

$$\frac{1}{C_j} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (\text{G.5})$$

Patarei kogumahtuvuse pöördväärtus on jadaühendusel võrdne üksikute kondensaatorite mahtuvuste pöördväärtuste summaga. Jadaühendusel liidetakse mahtuvuste pöördväärtusi.

Rööpühendusel (joon. 2.61) on kõigil kondensaatoritel sama pinge U , patarei kogulaeng q_r aga koosneb üksikute kondensaatorite laengutest.



J. 2.61. Kondensaatorite rööpühendus.

Laetud osakeste hulk täidab kondensaatoreid niisamuti nagu vesi ühendatud anumaid. Vee tase on kõigis anumates sama, vee kogumass aga summeerub üksikutes anumates sisalduvate veekoguste massidest. Laengute liitumisest

$$q_r = q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

tuleneb, et

$$C_r U = C_1 U + C_2 U + \dots + C_n U,$$

millest

$$C_r = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (\text{G.6})$$

Rööpühendusel liidetakse mahtuvusi endid.

Erikujuliste kondensaatorite mahtuvused (Duffin):

1. Sfääriline kondensaator:

Sfääriline kondensaator koosneb kahest kontsentrisest kerakihist raadiustega a ja b . Elektrivälja tugevus kahe kihi vahel avaldub punktlaengu juhule analoogilise valemiga

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.3 \text{ vt Gaussi teoreem})$$

ja potentsiaal φ või V valemiga:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.4)$$

kus $+Q$ on sisemise kera laeng. Välimisel kerakihil on siis laeng $-Q$. Mahtuvus:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \quad (5.7)$$

2. Silindriline kondensaator:

Silindriline kondensaator koosneb kahest kontsentrisest silindrist raadiustega a ja b .

Silindrite potentsiaalide vahe (pinge) leiame, integreerides aksiaalse elektrivälja tugevust (valem 4.10) üle süsteemi raadiuse r väljastpoolt ($r = b$) sissepoole ($r = a$):

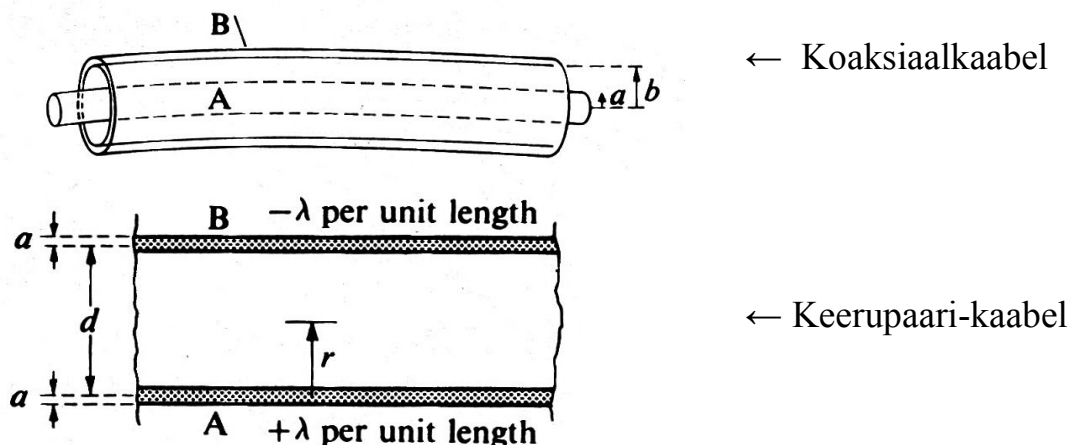
$$\Delta\varphi = \int_b^a -E \, dr = \int_b^a -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \, dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

kus $\lambda = q / L$ on silindrite laengu joontihedus.

Järelikult mahtuvus:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \quad (5.9)$$

Silindrilise kondensaatori valemi abil 5.9 arvutatakse koaksiaalkaabli (*coaxial cable*, vt allpool) pikkusühiku mahtuvus.



Keerupaari-kaabli (*twin cable*) pikkusühiku mahtuvuse leidmiseks tuleb kõigepealt avaldada pinge kaabli kahe juhtme vahel. Selleks integreerime alumise ja ülemise juhtme summaarse elektrivälja tugevust üle positiivse juhtme teljest mõõdetud koordinaadi r , alustades negatiivse juhtme alumisest servast ($r = d - a$) ja minnes kuni positiivse juhtme ülemise servani ($r = a$). Seejuures a on ühe juhtme raadius ja d – juhtmete telgede vahekaugus.

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{d-a}^a \left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r} \right) dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_{d-a}^a -\frac{dr}{r} + \int_{d-a}^a \frac{d(d-r)}{d-r} \right) =$$

$$\dots = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \{ [\ln(d-a) - \ln a] + \ln(d-a) - \ln[(d - (d-a))] \} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} 2 \ln \frac{d-a}{a} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Järelikult mahtuvus:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\frac{q}{\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} = \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} \quad (5.11a)$$

Kuna enamasti $d \gg a$, siis võime lugeda keerupaari-kaabli pikkusühiku mahtuvuseks

$$C_l = \frac{C}{L} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}. \quad (5.11b)$$

Elektrivälja energia

Gümnaasiumiõpik: (valemid G.7, G.8 jne

Elektrivälja olemasolu tähendab teatavasti jõu tekkimise võimalikkust. Analoogiliselt väljendab termin *elektrivälja energia* seda, et laetud keha võib elektriväljas omada energiat. Asume uurima, kuidas sõltub elektrivälja energia väljatugevusest või potentsiaalist. Kõige lihtsam on seda teha homogeense välja korral, mis täidab kondensaatori plaatide vahelist ruumi. Energia olemasolu laetud kondensaatoril pole raske näidata. Kondensaatori lühistamisel tekkiv säde võib olla välguna ere ning kostev pauk kõrvulukustav. Laetud kondensaatori energia on aga tegelikult tema plaatide vahelist ruumi täitva elektrivälja energia.

Paremini mõistame seda siis, kui arvestame, et laetud kondensaator sarnaneb kõrge täidetud veenõuga. Avades nõu põhjas oleva kraani, tekitame veejoa. Juga suudab teha tööd, näiteks panna liikuma vesiratta. Seda tööd tehakse mitte veenõu, vaid vee raskusjõu potentsiaalse energia arvelt. Viimane on aga oma sügavamalt olemuselt Maa gravitatsioonivälja energia. Täpselt niisamuti ei tee tööd mitte kondensaator, vaid temas sisalduv elektriväli.

Laetud kondensaator suudab teha tööd tänu sellele, et tööd on tehtud ka tema laadimisel. Kuna katetevaheline pinge muutub laadimise käigus, siis ei saa me tehtavat tööd A otsekohe leida pinge definitsiooni-valemist $U = A/Q$, mille põhjal

$$A = Q U,$$

sest me ei tea, missugust pinget kasutada. Mida suurem on kondensaatori katetele juba kogunenud laeng, seda suurem on pinge plaatide vahel ja seda rohkem tuleb kondensaatori täiendaval laadimisel tööd teha. Selleks, et leida kogu tööd, mis tehakse kondensaatori laadimisel, tuleb katetele antud laengut Q korrutada mitte pinge lõppväärtusega U , vaid laadimisel esineva keskmise pingega. Pinge kondensaatoril kasvab võrdeliselt laenguga alates nullist kuni lõppväärtuseni U . Keskmise pinge kui pool algväärtuse ja lõppväärtuse summast on seega $U/2$. Laadimisel tehtud töö või kondensaatoris tekitatud **elektrivälja energia** avaldub kujul

$$E_e = \frac{C U^2}{2}, \quad (\text{G.7})$$

kus kogulaeng Q on mahtuvuse definitsiooni põhjal asendatud korrutisega $C U$ ning pinge rollis esineb laadimisprotsessi keskmine pinge $U/2$. Ülikooli elektrikursuse tasemel saadakse see valem integreerimise teel:

$$E_e = A_{\text{laadimisel}} = \int_0^Q u \, dq = \int_0^Q \frac{q}{C} \, dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C U^2}{2}.$$

Oleme leidnud kondensaatori elektrivälja energia sõltuvuse plaatidevahelisest pingest ehk ühe plaadi potentsiaalst teise suhtes. Selle energia võib avaldada ka väljatugevuse kaudu. Kuna

$$U = E d,$$

siis plaatide kindla vahekauguse d korral on pinge U ja väljatugevus E omavahel võrdelised. Seega on elektrivälja energia võrdeline ka väljatugevuse ruuduga

$$E_e = \frac{C U^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2 d^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S d E^2}{2}.$$

Kuna korrutis $S d$ on kondensaatori plaatidevaheline ruumala, siis ruumalaühikus sisalduv elektrivälja energia ehk **energia ruumtihedus**:

$$w_e = \frac{dE_e}{dV} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} \quad (\text{G.8})$$

Valem G.8 on tuletatud plaatkondensaatoris esineva homogeense elektrivälja jaoks, aga see kehtib mistahes konfiguratsiooniga elektrivälja korral.