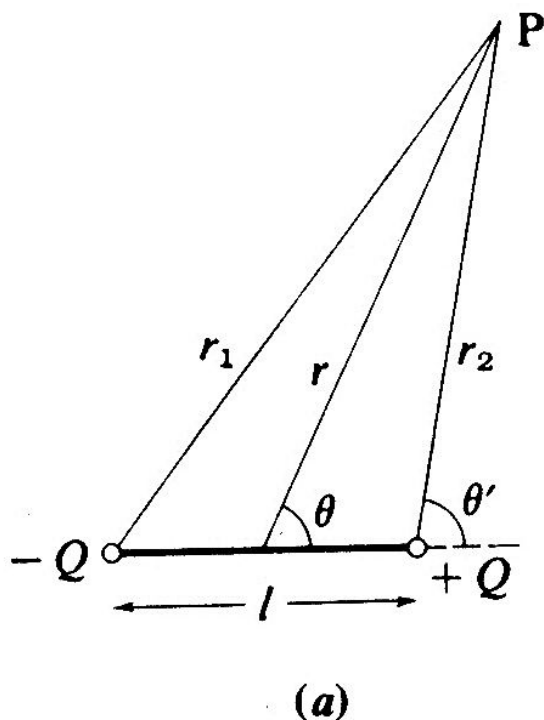


Dipool elektriväljas (Duffin, 3.9)

Elektriline dipool koosneb kahest võrdsest, aga vastandlike märkidega laengust $\pm Q$, mis paiknevad teineteisest kaugusel l . Laengute vahekaugust nimetatakse **dipooli õlaks**. Õlga vaadeldakse vektorina, mis on suunatud negatiivselt laengult positiivsele (**NB!** vastupidiselt dipooli koostisesse kuuluvate laengute elektrivälja suunale!).

Ideaalseks nimetatakse dipooli, mille korral õla pikkus l on tühiselt väike võrreldes kaugusega teiste laenguteni või punktideni, milles me leiame dipooli elektrivälja tugevust. Kõigepealt leiame siiski avaldise mitteideaalse dipooli elektrivälja potentsiaali ja väljatugevuse jaoks:



Leiame mitteideaalse dipooli poolt tekitatud elektrivälja tugevuse punktis P (joonis a), mille polaarkoordinaadid on (r, θ) . **NB!** kõigis dipooli käsitlustes loetakse koordinaatide alguspunktiks dipooli õla keskpunkt! Punktlaengu potentsiaali valemi põhjal

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{Q(r_1 - r_2)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2} \quad (3.33)$$

Koosinusteoreemist saame, et

$$r_1^2 = r_2^2 + l^2 + 2 r_2 l \cos \theta',$$

millest $r_1^2 - r_2^2 = l(l + 2 r_2 \cos \theta')$

ehk $r_1 - r_2 = \frac{l(l + 2 r_2 \cos \theta')}{r_1 + r_2}$

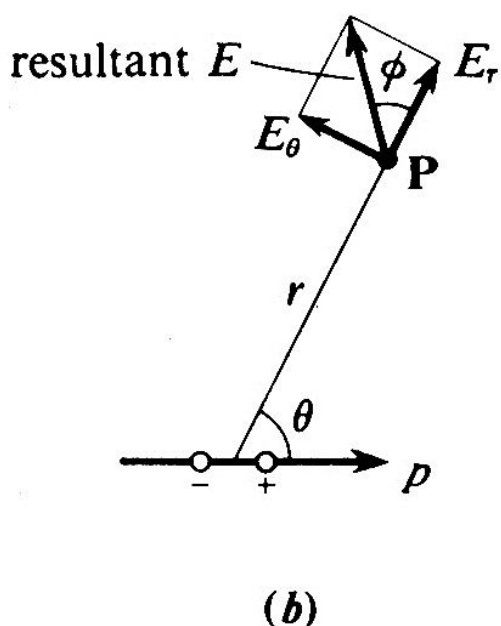
ja seega $V_P = \frac{Ql(l + 2 r_2 \cos \theta')}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$.

Ideaalse dipooli ($r \gg l$) korral $r_1, r_2 \rightarrow r$ ja $\theta' \rightarrow \theta$,

seega $V_P = \frac{Ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.34)$

Näeme, et dipooli kirjeldavates valemities esi-
neb alati suurus $p_e = Ql$, mida nimetatakse **dipoolmomendiks**. See on negatiivselt laengult positiivse poole suunatud vektor

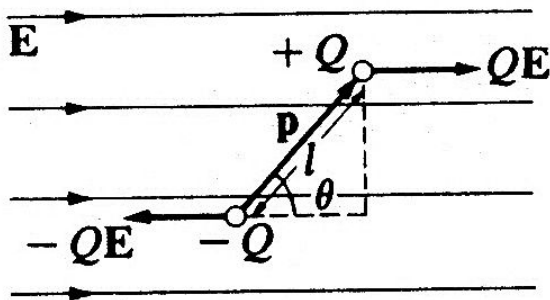
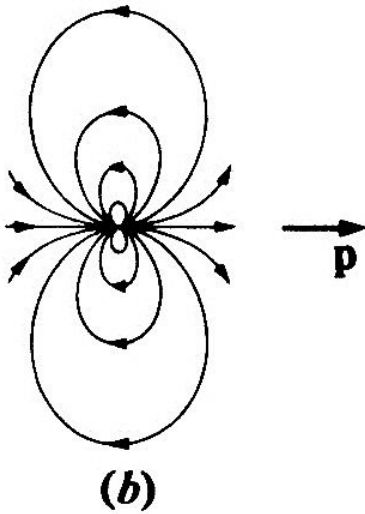
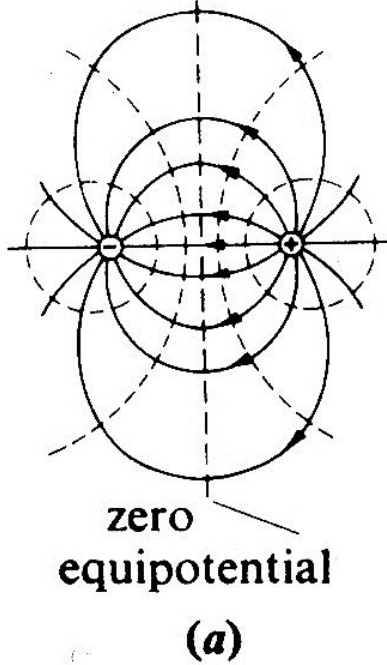
$$\mathbf{p}_e = Q\mathbf{l} \quad (3.36)$$



Nüüd võime valemi 3.34 kirjutada kujul

$$V_p = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.37)$$

Duffin'i õpikus kasutatakse dipoolmomendi tähisena lihtsalt p , aga kuna see juba niigi tähistab mitmeid füüsikalisi suurusid (rõhk, impulss), siis on mõistlik lisada selgitav indeks e (süsteemi elektriline moment, erinevalt magnetmomendist p_m). Joonistel on p ilma indeksita.



Kasutades skalaarkorrutise mõistet, võime valemi 3.37 esitada kujul

$$V_p = \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p}_e \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Väljatugevuse saame, arvutades potentsiaali gradiendi. Teeme seda eraldi väljatugevuse radiaalosa E_r ja tangentsiaalosa E_θ jaoks (joonis **b** eelm. lk):

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2}{r^3} \right) = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\sin \theta) = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Seega

$$E_r = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} ; \quad E_\theta = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} . \quad (3.39)$$

Resultantvälja tugevus kui E_r ja E_θ vektorsumma on leitav Pythagorase teoreemi rakendamisel:

$$E_{dip} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} .$$

Elektriväljas hakkab dipoolile mõjuma jõumoment T_θ (torque, tähis ka M_F), mis üritab dipooli pöörata nii, et dipoolmomendi suund ühtiks dipoolile mõjuva elektrivälja suunaga (joonisel paremale). Kuna jõupaari õlgaks on jõudude mõjumissihtide vahekaugus $l \sin \theta$, siis

$$M_F = \text{jõud} \cdot \text{õlg} = Q E \cdot l \sin \theta = p_e E \sin \theta \quad (3.40)$$

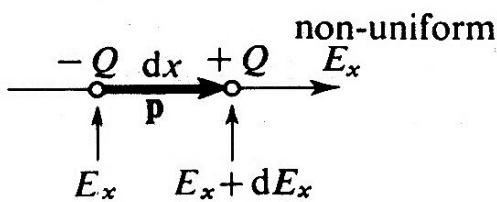
Pöörava jõumomendi võib järelilikult esitada vektorkorrutisena: $\mathbf{M}_F = \mathbf{p}_e \times \mathbf{E} \quad (3.41)$

Homogeenses elektriväljas (*uniform field*) on summaarne jõud null. Elektriväli küll pöörab dipooli, aga ei pane seda tervikuna liikuma. Mittehomogeenses väljas, mis on suunatud piki x -telge, mõjub orienteerunud dipoolile kui tervikule väljatugevuse gradiendiga määratud jõud

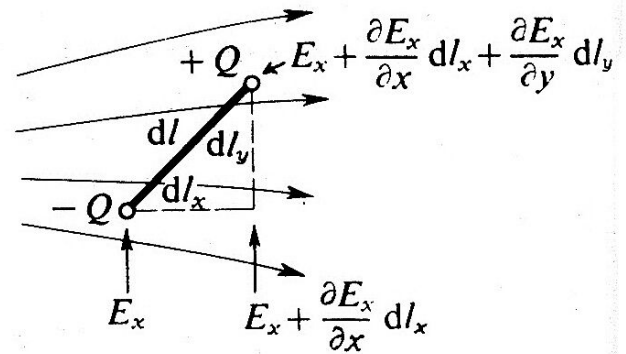
$$F_x = -Q E_x + Q \left(E_x + \frac{dE_x}{dx} l \right) = p_e \frac{dE_x}{dx} \quad (3.42)$$

kuna väljatugevus suureneb dipooli öla pikkusel (dE_x/dx) l võrra (vt. joonist allpool). Üldjuhul mittehomogeenses väljas (*non-uniform field*):

$$F_x = p_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right) + p_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + p_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (3.43)$$

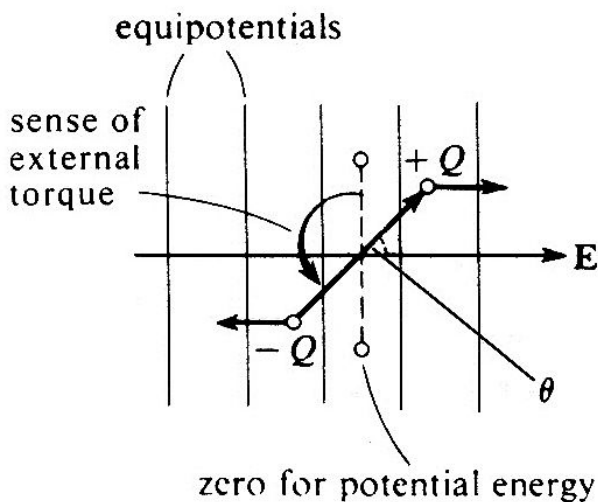


(a)



(b)

Valemid 3.40 ja 3.41 jäävad kehtima ka mittehomogeenses väljas, kuna kõrgemat järku väikeste parandusliikmete ärajätmisel mõjuvad mõlemale laengule ikkagi võrdsed jõud.



Kuna dipool saab elektrivälja poolt mõjuva jõumomendi toimet pöörduda, siis omab ta potentsiaalset energiat. See energia loetakse kokkuleppeliselt võrdseks nulliga asendis, kus dipoolmoment on risti elektrivälja suunaga ($\theta = \pi/2$), kuna see asend jääb täpselt energia maksimumi asendi ($\mathbf{p}_e \uparrow \downarrow \mathbf{E}$, dipoolmoment “vastu välja”) ning energia miinimumi asendi ($\mathbf{p}_e \uparrow \uparrow \mathbf{E}$, dipoolmoment “päri välja”) vahele. Töö, mida elektriväli teeb dipooli pööramisel null-energia asendist ($\alpha = \pi/2$) kuni nurgani θ , avaldub kujul

$$A = \int_{\pi/2}^{\theta} p_e E \sin \alpha d\alpha = [-p_e E \cos \alpha]_{\pi/2}^{\theta}$$

Dipooli potentsiaalne energia elektriväljas on esitatav skalaarkorrutisena

$$E_{pot} = -p_e E \cos \theta = -\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{E}. \quad (3.44)$$

Kahe dipooli omavahelist vastastikmõju kirjeldab alljärgnev tabel:

		forces	torques	mutual potential energy
(a)				
(b)		$F_r = + \frac{3p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}$ (along r)	0	$\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
(c)		$F_r = - \frac{6p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}$ (along r)	0	$-\frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
(d)		$F_\theta = \pm \frac{3p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}$ (perpendicular to r)	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ on } p_1 \\ \text{(clockwise)} \\ \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ on } p_2 \\ \text{(clockwise)} \end{array} \right\} 0$	

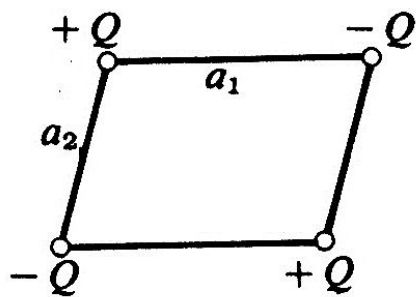
Kahe dipooli omavahelise vastastikmõju potentsiaalne energia (*mutual potential energy*) avaldub üldjuhul valemiga (variant **a** ülemisel joonisel):

$$E_{pot} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) \quad (3.46)$$

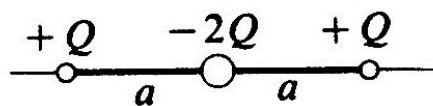
Punktlaengute ja dipoolide omavahelist vastastikmõju kirjeldab alljärgnev tabel:

	force	potential energy
	$\propto Q_1 Q_2 / r^2$	$\propto Q_1 Q_2 / r$
	$\propto Q p / r^3$	$\propto Q p / r^2$
	$\propto p_1 p_2 / r^4$	$\propto p_1 p_2 / r^3$

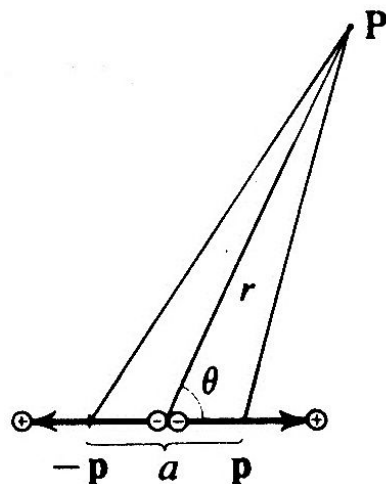
Looduses võime kohata ka neljast punktlaengust Q koosnevaid terviklikke süsteeme, mida nimetatakse **kvadrupoolideks**. Kvadrupooli kirjeldab kvadrupoolmoment q_e , mis lineaarse kvadrupooli korral (vt joonist b allpool) avaldub kujul $q_e = Q a^2$.



(a)



(b)



Üldjuhul võivad laengute vahekaugused kvadrupoolis olla erinevad (joonis **a** ülal vasakul). Lineaarne kvadrupool (joonis **b** ja parempoolne joonis) on vaadeldav kahest vastandlike suundadega dipoolmomente omavast dipoolist koosneva süsteemina. Sellise süsteemi poolt punktis P tekitatav potentsiaal avaldub valemiga

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2 \theta - 1) \quad (3.47)$$

ja elektrivälja tugevus on seega pöördvõrdeline kauguse r neljanda astmega.