

Elektrivälja tugevus ja potentsiaal (Duffin, ptk.3)

1. Elektrivälja tugevus:

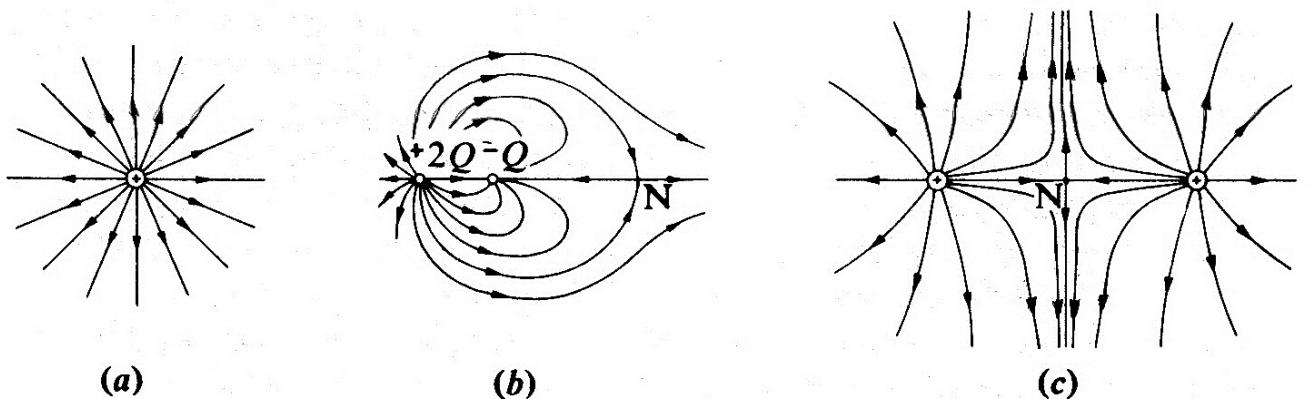
Elektrivälja tugevus on Duffin'i õpikus defineeritud piirväärtusena jõu $\mathbf{F}$ ja proovikeha laengu Q_t (*test charge*) suhtest:

$$\mathbf{E} = \lim_{Q_t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{Q_t}$$

Seda tehakse lähtudes soovist mitte mõjutada proovilaengu lisamisega ülejäänud laengute elektrivälja.

Elektrivälja jõujooned:

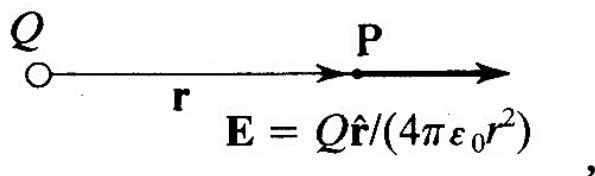
a) üksiku punktlaengu korral, b) laengud $+2Q$ ja $-Q$, c) laengud $+Q$ ja $+Q$



N tähistab neutraalpunkti, kus väljatugevus on null.

Punktlaengu Q poolt tekitatud väljatugevus punktis P:

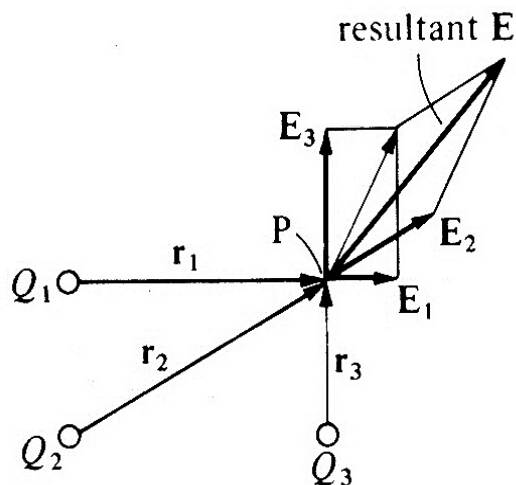
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



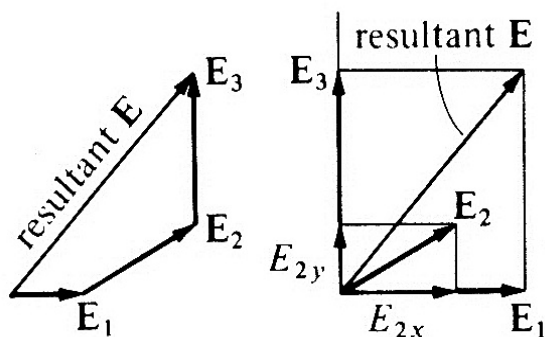
kus $\hat{\mathbf{r}}$ on $\mathbf{r}$ suunaline ühikvektor.

Elektrivälja tugevuste vektoriaalne superpositsioon ehk liitumine mitme punktlaengu korral:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 + \dots = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

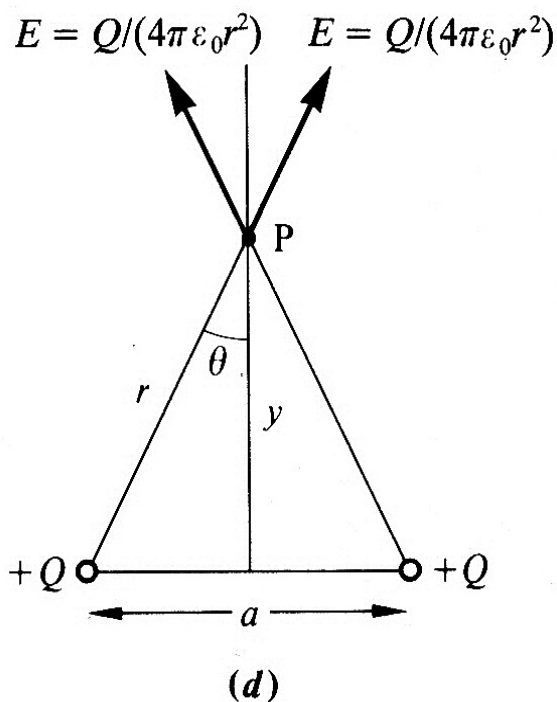


(a)



(b)

(c)



(d)

a) vektorite E_1 , E_2 ja E_3 liitmine kasutades mitu korda rõõpküliku meetodit

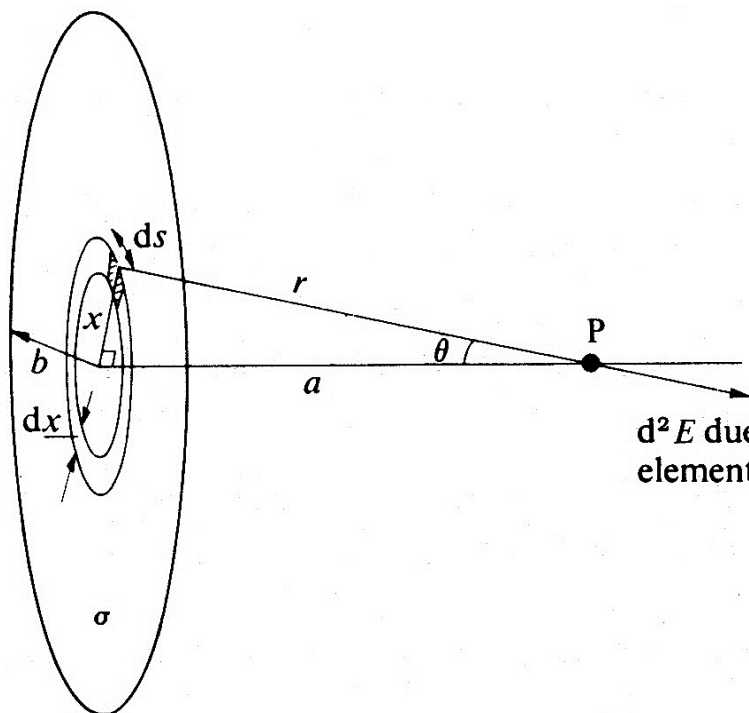
b) sama polügooni meetodil

c) liitmine komponentide kaupa

Superpositsiooni printsiipi rakendatakse sageli mingi keha poolt tekitatud elektrivälja tugevuse leidmiseks nii, et jagatakse keha mõtteliselt väga väikesteks (diferentsiaalselt väikesteks) tükkideks. Oma väiksuse tõttu on need tükid vaadeldavad punktlaengutena. Keha kui terviku elektrivälja tugevuse leidmiseks liidetakse keha kõigi diferentsiaalselt väikeste elementide poolt tekitatavad väljatugevused. Diferentsiaalselt väikeste suuruste liitmine on **integreerimine**. Allpool käsitleme paari näidet sellise protseduuri kohta.

Ühtlaselt laetud **ketta** elektrivälja tugevuse leidmine. Duffin teeb eelduse, et $\varepsilon=1$, tegemist on vaakumiga. Ketta laengu **pindtihedus** (pindalaühiku kohta tulev laeng) on

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$



Elektrivälja tugevuse leidmiseks punktis P (ketta tsentrist risti kaugusel a) jaotatakse ketas väikesteks elementideks laenguga $\sigma ds dx$. Iga selline element kui punktlaeng põhjustab punktis P välja

$$d^2E = k \frac{dq}{r^2} = \frac{\sigma ds dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

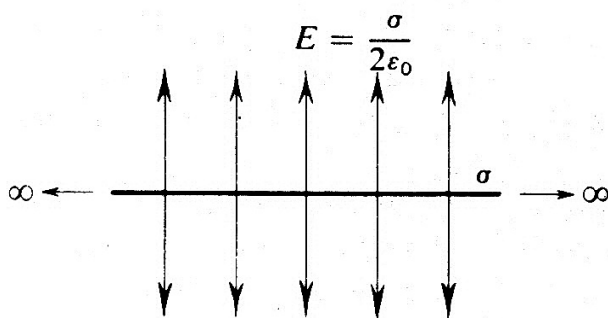
d^2E due to element ds

Samal raadiusel paiknevate elementide a -ga ristisuunalised komponendid taanduvad välja ning järelikult raadiust x ja laiust dx omava rõnga poolt põhjustatud väljatugevus on

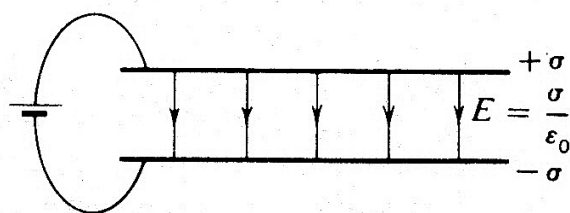
$$dE = \frac{\sigma 2\pi x dx \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma a x dx}{2\varepsilon_0 r^3}.$$

Kogu ketta poolt põhjustatud elektrivälja tugevuse leidmiseks tuleb saadud avaldist integreerida üle kogu raadiuse x (nullist b -ni):

$$E = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \int_0^b \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{4\varepsilon_0} \int_{x=0}^{x=b} \frac{d(a^2 + x^2)}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right]_{x=0}^{x=b} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \right].$$



(a)



(b)

a) Ühtlaselt laetud lõpmatu tasandi korral ($b \rightarrow \infty$): $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$

b) Kahe erinimeliselt laetud tasandi korral: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$

Elektrivälja ühtlaselt laetud lõpmatu tasandi kummalgi pool (või kahe tasandi vahel) on homogeenne – E -vektori suund ja suurus ei sõltu asukohast.

Summaarset laengut q omava ketta väljatugevuse võib esitada ka Coulomb'i seaduse võrdeteguri k abil, kasutades kauguse r suurimat väärtust $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$:

$$E = \frac{\sigma a}{2 \epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{4 \epsilon_0} \frac{q}{\pi b^2} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right] = \frac{2 k q}{b^2} \left[1 - \frac{a}{R} \right] = \frac{2 k q}{R^2 - a^2} \frac{R - a}{R} = \frac{2 k q}{R(R + a)}.$$

Piirjuhul, kui ketas tõmbub kokku punktlaenguks ($b \rightarrow 0$ ja $R \rightarrow a$), siis saame punktlaengu väljatugevuse valemi

$$E = k \frac{q}{a^2}, \quad \text{kus} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

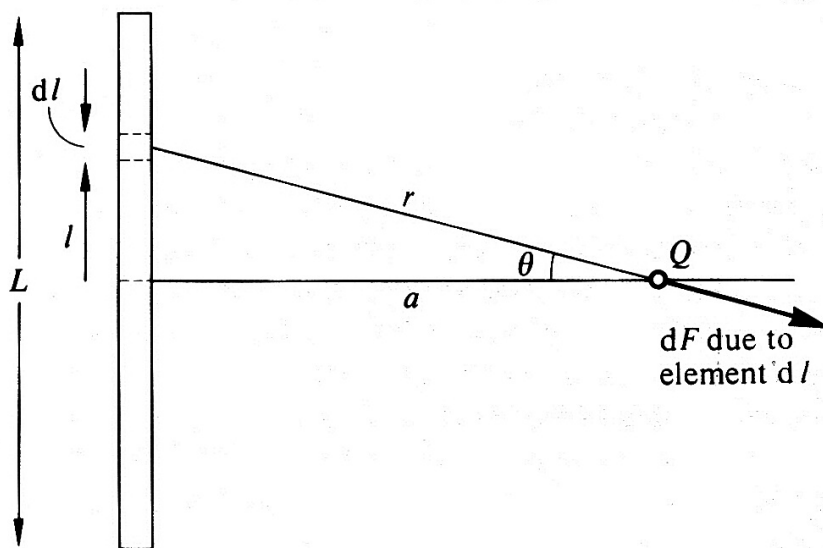
Märkus (KT): Halliday-Resnick-Walker'i (HRW) õpikus *Fundamentals of Physics* ja ka eksami väljageomeetria ülesande konspektis tähistatakse vaadeldava väljapunkti kaugust välja tekitavast detailist tähega z ning a on hoopis ülesande karakteristliku mõõtme (näiteks ketta raadiuse) tähiseks. Seega väljatugevus ühtlaselt laetud ketta teljel, millel paikneb laeng q , avaldub valemiga:

$$E = \frac{2 k q}{R(R + z)},$$

kus k on Coulomb'i võrdetegur, z on uuritava punkti kaugus ketta tsentrist ning R on uuritava punkti kaugus ketta äärest (joonisel esineva muutuva r suurim väärtus), $R = (a^2 + z^2)^{1/2}$, kui a on ketta raadius.

Leiame ka ühtlaselt laetud varda (pikkusega L) elektrivälja tugevuse varda keskristsirgel, kaugusel a vardast. Varda **laengu joontihedus** (pikkuse ühiku kohta tulev laeng) on

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{L}, \quad \text{kus} \quad q = \lambda L \quad \text{on kogu vardal paiknev laeng.}$$



Element dl mõjub laengule Q jõuga $dF = \frac{Q \lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Sümmeetria tõttu taanduvad a -ga ristisuunalised jõukomponendid välja ning kogu varda poolt mõjub laengule Q jõud

$$F = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{Q \lambda dl \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{Q \lambda}{4\pi \epsilon_0 a} \int_{l=-L/2}^{l=+L/2} \cos \theta d\theta.$$

Selle seose saamisel arvestame, et l suurenemisel dl võrra suureneb nurk θ $d\theta$ võrra, kusjuures see nurk $d\theta$ toetub raadiust r omava ringjoone diferentsiaalsele kaaretükile $ds = r d\theta$. Samas aga $ds/dl = r d\theta / dl = \cos \theta = a/r$. Siit $r^2 d\theta = a dl$ ehk $dl / r^2 = d\theta / a$. Integreerimisel saame, et

$$F = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} [\sin \theta]_{l=-L/2}^{l=+L/2} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left\{ \frac{L}{2R} - \left(-\frac{L}{2R} \right) \right\} = \frac{Q\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a R}, \quad \text{kus} \quad R = \left(a^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}.$$

Elektrivälja tugevus:
$$E = \frac{F}{Q} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a \left(a^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}} = k \frac{\lambda L}{a R} = k \frac{q}{a R}.$$

Kui $L \rightarrow 0$, siis $R \rightarrow a$ ja me saame punktlaengu väljatugevuse valemi $E = k \frac{q}{a^2}.$

Lõpmata pika varda ($L \gg a$) korral: $F = \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$ ja elektrivälja tugevus $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}.$

Kommentaari (KT): HRW õpiku ja väljageomeetria konspekti tähistes võtab ühtlaselt laetud varda väljatugevuse valem varda keskristsirgel kuju

$$E = k \frac{q}{z R},$$

kus k on Coulomb'i võrdetegur, q on varda laeng, z on uuritava punkti kaugus varda tsentrist ning R on uuritava punkti kaugus varda otsast. Eksami väljageomeetria ülesandes on varda pikkus $L = 2a$, kus a on vaadeldava kehade süsteemi karakteristiklik mõõde. Seega jälle $R = (a^2 + z^2)^{1/2}.$

Uurime nüüd ka ühtlaselt laetud varda elektrivälja tugevust varda otsa ristsirgel. See omab nii vardaga paralleelset (E_{par}) kui ka vardaga ristuvat komponenti (E_{rist}). Analooiliselt ülaltoodud arutlusega on ristkomponent avaldatav kujul (kasutame juba kauguse tähist z):

$$E_{\text{rist}} = \int_0^L \frac{\lambda \, dl \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = k \frac{\lambda}{z} \int_{l=0}^{l=L} \cos \theta \, d\theta = k \frac{\lambda}{z} \left(\frac{L}{R'} - 0 \right) = k \frac{q}{z R'}, \quad \text{kus} \quad R' = \sqrt{L^2 + z^2} \quad \text{ja} \quad \sin \theta_{\text{max}} = \frac{L}{R'}.$$

Paralleelkomponendi jaoks saame

$$E_{\text{par}} = \int_0^L \frac{\lambda \, dl \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = k \frac{\lambda}{z} \int_{l=0}^{l=L} \sin \theta \, d\theta = k \frac{\lambda}{z} [-\cos \theta]_{l=0}^{l=L} = k \frac{\lambda L}{z L} \left(1 - \frac{z}{R'} \right) = k \frac{q}{L} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R'} \right), \quad \text{kuna}$$

$$\cos \theta_{\text{min}} = \cos 0 = 1 \quad \text{ja} \quad \cos \theta_{\text{max}} = \frac{z}{R'}.$$

Seega summaarne väljatugevus varda otsa ristsirgel:

$$E = \sqrt{E_{\text{rist}}^2 + E_{\text{par}}^2} = k \frac{q}{zL} \sqrt{\frac{L^2}{R'^2} + 1 - \frac{2z}{R'} + \frac{z^2}{R'^2}} = k \frac{q}{zL} \sqrt{\frac{L^2 + z^2}{R'^2} + 1 - \frac{2z}{R'}} = k \frac{q}{zL} \sqrt{2 - \frac{2z}{R'}} = k \frac{q}{zL} \sqrt{2 \left(1 - \frac{z}{R'} \right)}$$

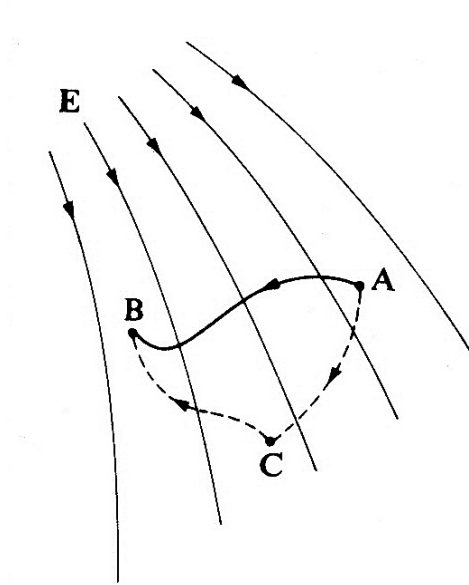
Analooiliselt võiksime nüüd tuletada valemi ühtlaselt laetud varda elektrivälja tugevuse leidmiseks mistahes punktis. Tuleb vaid vastavalt valida integraali rajad.

---- (KT kommentaari lõpp)

Töö elektriväljas:

Kuna elektrivälja jõud on konservatiivne, siis välja töö proovilaengu viimisel punktist A punkti B ei sõltu liikumistee kujust ja proovilaengu võib vahepeal viia punkti C:

$$A_{AB} = A_{AC} + A_{CB}$$



Pinge punktide A ja B vahel on defineeritud läbi töö A_{AB} , mida elektriväli teeb proovilaengu q viimisel punktist A punkti B:

$$U_{AB} = \frac{A_{AB}}{q},$$

ehk Duffin'i õpiku "inglise" tähistes: $V_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q_t}$ (3.7)

Elektrivälja potentsiaal punktis B on defineeritud kui selles punktis paikneva ühikulise positiivse laenguga keha potentsiaalne energia:

$$\varphi_B = \frac{E_{pB}}{q},$$

ehk siis Duffin'i õpiku "inglise" tähistes: $V_B = \frac{W_{AB}}{Q_t} = \frac{U_B}{Q_t}$, (3.8)

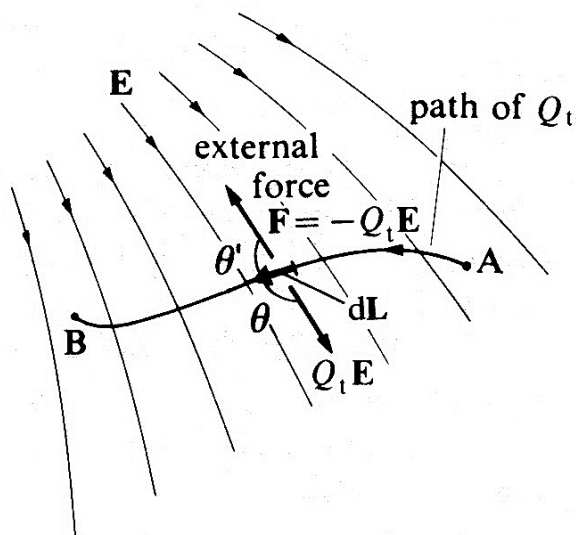
kus defineerimine toimub läbi sellesama nihutusel AB tehtava töö, eeldusel et potentsiaal punktis A on null.

Kuna töö on kahe potentsiaalse energia vahe, siis pinge on kahe potentsiaali vahe

$$U_{AB} = \frac{A_{AB}}{q} = \frac{E_{p,B} - E_{p,A}}{q} = \varphi_B - \varphi_A$$

Töö on esitatav joonintegraalina:

$$A_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_A^B -Q_t \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$



Seega potentsiaalide vahe:

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_A^B -E \cos \theta dL \quad (3.12)$$

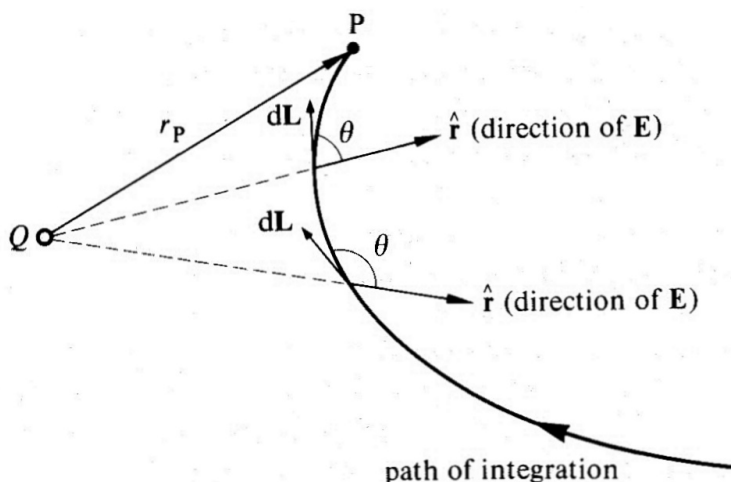
ja potentsiaal punktis B (punktis A - null):

$$\varphi_B = \int_A^B -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3.13)$$

Selle võib esitada skalaarkorrutisena:

$$\varphi_B = \int_{\infty}^{r_p} -\frac{Q\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{L}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

või siis ainult radiaalse diferentsiaalse nihke dr abil: $\varphi_B = \int_{\infty}^{r_p} -\frac{Q \cdot dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$



Suvalises trajektoori punktis kehtib $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{L} = dL \cos \theta = dr$

Punktlaengu Q poolt tekitatud elektrivälja potentsiaal punktis P , mille kaugus sellest punktlaengust on r_p , kui kokkuleppeline nullpotentsiaal asub Q -st lõpmata kaugel,

avalduv kujul: $\varphi_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_p} \quad (3.14)$

Seega pinge kui potentsiaalide vahe:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.15)$$

Punktlaengute Q_i poolt tekitatud potentsiaal punktis, millest punktlaengud paiknevad vastavalt kaugusel r_i :

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (3.16)$$

Leiame ühtlaselt laetud keha (ruumalaga V) tekitatud potentsiaali. **Laengu ruumtihedus** (ruumala ühiku kohta tulev laeng) on

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Kogu ruumlaengu poolt tekitatud potentsiaali leidmiseks tuleb integreerida üle kogu ruumala V . Analoogiliselt pind- ja joonlaengu korral tuleb integreerida vastavalt üle pinna S või joone L .

$$\varphi_\rho = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \varphi_\sigma = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \varphi_\lambda = \int_L \frac{\lambda dL}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.17)$$

Potentsiaal homogeenises x -telje suunalises elektriväljas (valemist 3.13):

$$\varphi = -E x + \text{const.}$$

Pisikesel nihkel dL elektriväljas E avaldub potentsiaali muutus: $d\varphi = -E \cdot dL$

Tähistades vastava skalaarkorrutise E_L -ga, kus E_L on L suunaline E komponent, saame et elektrivälja tugevus mingis kindlas suunas on võrdeline potentsiaali kahanemise kiirusega vastavas suunas:

$$E_L = -\frac{\partial \varphi}{\partial L} \quad (3.20)$$

Üldisemalt võime ristkoordinaatides kirjutada:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (3.21)$$

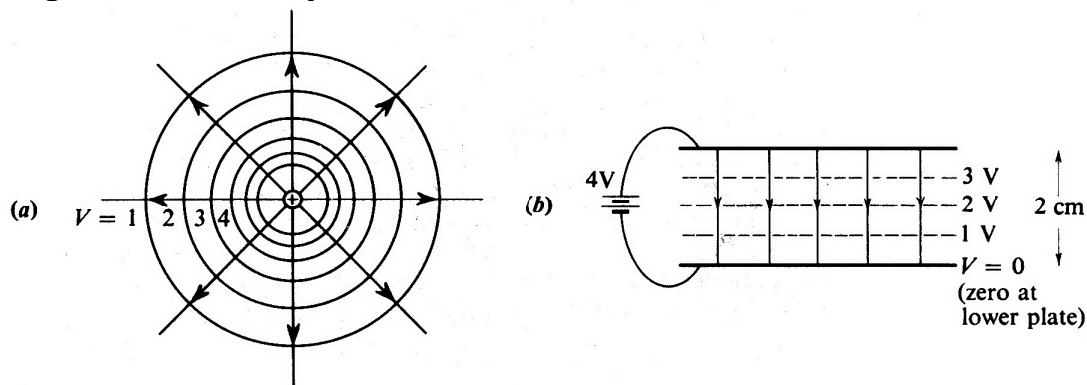
ning polaarkoordinaatides:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (3.22)$$

Näide: olgu potentsiaal mingis piirkonnas tasandil määratud valemiga $\varphi = K(x^2 - 2y^2)$, kus $K = \text{const.}$ Siis elektrivälja tugevuse komponendid avalduvad vastavalt valemitele (3.21) järgnevalt:

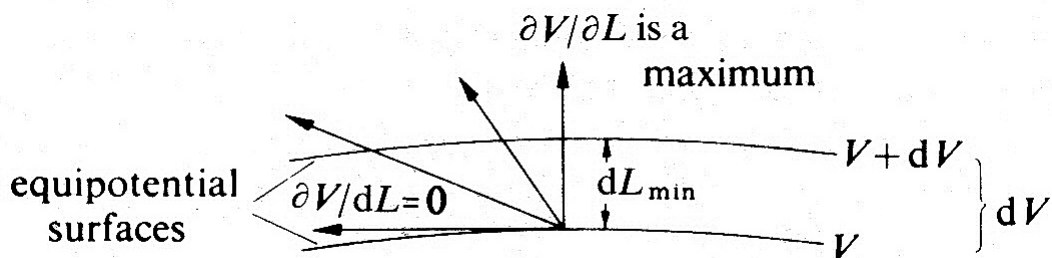
$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2Kx \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4Ky$$

Ekvipotentsiaalpinnad (-jooned) on pinnad (jooned), millel potentsiaali väärtus on igas punktis sama. Joonisel (a) on kujutatud ekvipotentsiaaljooned punktlaengu ümber, joonisel (b) homogeenises elektriväljas:



Elektrivälja tugevuse vektor pingis punktis on alati vastavat punkti läbiva ekvipotentsiaalpinna (tasandil ekvipotentsiaaljoone) normaali suunaline.

Ekvipotentsiaalpindade potentsiaalide vahe on alati konstantne, seega mida tihedamini paiknevad ekvipotentsiaalpinnad, seda suurem on elektrivälja tugevus vastavas piirkonnas.



Edaspidi asume kasutama matemaatilises füüsikas õpitud nabla-vektorit.

Nabla ∇ on kujuteldav vektor, mille komponentideks on osatuletise leidmise operaatorid vastavate koordinaatide järgi:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Nabla-vektori skalaarkorrutis iseendaga on Laplace'i operaator ehk *labla* : $\nabla^2 = \Delta$.

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Nabla kui operaatori rakendamisel skalaarfunktsioonile $\varphi = \varphi(x, y, z)$ saame selle skalaarfunktsiooni gradiendi. **Gradient** (tähis $\text{grad } \varphi$) on vektor, mille suunaks on vastava skalaarse suuruse kõige kiirema kasvamise suund. Näiteks temperatuuri gradient on suunatud soojusallika poole. Kasutades gradiendi mõistet, võime valemid 3.21 kompaktselt esitada kujul

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Seega elektrivälja tugevus võrdub potentsiaali gradiendi vastandväärtusega. Elektriväli on suunatud mitte potentsiaali kasvu vaid **kahanemise** suunas. Positiivse laenguga keha liigub välja jõudude mõjul potentsiaali languse suunas, sest potentsiaalne energia kahaneb (energia miinimumi printsiip).