

## Dielektrikud (Duffin, 11. ptk *Dielectric materials*)

### 1. Lineaarse, isotroopse ja homogeense (LIH) keskkonna suhteline dielektriline läbitavus.

Duffin nimetab aine dielektrilist läbitavust  $\varepsilon$  **suhteliseks** dielektriliseks läbitavuseks (tähis  $\varepsilon_r$ ), elektrikonstanti  $\varepsilon_0$  nimetab ta vaakumi dielektriliseks läbitavuseks (*permittivity of vacuum*). Aine dielektriline läbitavus on Duffinil defineeritud kui vaadeldava ainega täidetud kondensaatori mahtuvuse  $C_m$  (*with medium*) ja sellesama, kuid ilma aineta (vaakumiga täidetud) kondensaatori mahtuvuse  $C_0$  suhe

$$\frac{C_m}{C_0} = \varepsilon. \quad (11.1)$$

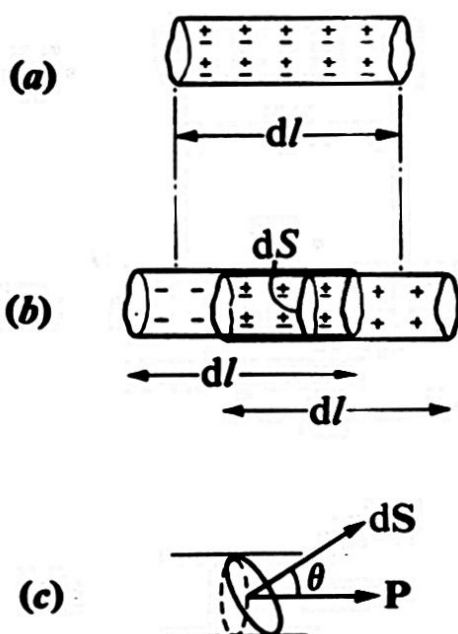
**Lineaarne** on keskkond, milles dielektriline läbitavus  $\varepsilon$  ei sõltu pingest või elektrivälja tugevusest. **Isotroopne** on keskkond, milles  $\varepsilon$  ei sõltu elektrivälja suunast. **Homogeenne** on keskkond, milles  $\varepsilon$  on sama uuritava dielektriku kõigis osades. LIH keskkonnas omandavad potentsiaali ja elektrivälja tugevuse valemid kuju, mis sisaldab dielektrilist läbitavust  $\varepsilon$  nimetajas:

Potentsiaal punktlaengul  $V = \frac{Q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r}$  ja pinnalaengul  $V = \int_s \frac{\sigma dS}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r} \quad (11.2)$

Väljatugevus punktlaengul  $E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2} \hat{r}$  ja pinnalaengul  $E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (11.3)$

kusjuures tähisega  $E_n$  rõhutame, et tegemist on  $E$ -vektori normaalisuunalise komponendiga.

### 2. Polarisatsioonivektor $P$ :



Uurime aine mingit elementaarset silindrilise kujuga kogust diferentsiaalse pikkusega  $dl$  ja ristlõikepindalaga  $dS$ . Polarisatsioonimata seisundis (joonis **a**) aine osakeste positiivsete ja negatiivsete laengukeskmete asukohad ühtivad. **Polariseeritud** seisundis (näiteks vasakult paremale mõjuvas elektriväljas) ühtivad nad ainult elemendi keskel (joonis **b**), elemendi otstes on aga tekkinud tasakaalustamata laengud ehk **polarisatsioonilaengud**. Element on muutunud elektriliseks dipooliks. Me defineerime polarisatsioonivektori kui aine ruumalaühiku summaarse dipoolmomendi:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_e}{\Delta V} = \frac{d}{dV} \sum \mathbf{p}_e = \frac{d\mathbf{p}_e}{dV}.$$

Viimases võrduses vaatleme dipoolmomenti juba pideva suurusena. Seega kehtib

$$d\mathbf{p}_e = \mathbf{P} dV = \mathbf{P} dS dl, \quad (11.4)$$

millest järeldub, et korrutis  $\mathbf{P} dS$  on vaadeldav dipoolse elemendi kumbagi otsa ilmunud ja seega elemendi otsapinda  $dS$  ristsuunas läbinud laenguna ehk **polarisatsioonilaenguna**. Kui polarisatsioonivektor  $\mathbf{P}$  ei ole risti pinnaga  $dS$ , siis on ühikulist pinda läbiv laeng määratud  $\mathbf{P}$  normaalkomponendiga (joonis c). Seega võrdub (vektorina vaadeldavat) pinda  $dS$  läbiv diferentsiaalne polarisatsioonilaeng  $dQ_p$  vektorite  $\mathbf{P}$  ja  $d\mathbf{S}$  skalaarkorrutisega:

$$dQ_p = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (11.5)$$

ja polarisatsioonilaengu pindtihedus  $\sigma_p$  võrdub polarisatsioonivektori selle pinna normaali suunalise komponendiga  $P_n$ :

$$\sigma_p = \frac{d}{dS} Q_p = P_n \quad (11.6)$$

Kui polarisatsioonivektor ei ole kogu uuritava ainekoguse ulatuses ühesugune, siis võivad polarisatsioonilaengud eksisteerida ka ruumis. Nende uurimiseks vaatleme täielikult dielektriku sees paiknevat kinnist pinda  $S$ , mille osadeks on ülalpool nimetatud pinnaelemendid  $d\mathbf{S}$ . Sellest pinnast väljuv polarisatsioonilaeng on positiivne, kuna  $\mathbf{P}$ -vektor on dipoolmomenti definitsiooni kohaselt suunatud „miinuselt plussile“. Pinna sisse jääb sama suur negatiivne polarisatsioonilaeng:

$$Q_p = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (11.7)$$

Kuna voo ruumtihedus on divergents, siis saame polarisatsioonilaengute ruumtiheduse avaldada kujul:

$$\rho_p = \frac{d}{dV} Q_p = -\frac{d}{dV} \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (11.8)$$

### 3. Elektrivälja dielektrikutes.

Vaatleme dielektrikus tekkivat elektrivälja  $\mathbf{E}$  summana väljast vaakumis (edaspidi ka: juhtivuslaengute väljast)  $\mathbf{E}_0$  ja aine poolt tekitatavast lisaväljast (polarisatsioonilaengute väljast)  $\mathbf{E}_p$  (varasemates õpikutes tähistatud ka  $\mathbf{E}'$ ):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p \quad (11.9)$$

Defineerime (di)elektrilise **vastuvõtlikkuse**  $\chi_e$  (*susceptibility*) seosega

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (11.10)$$

kusjuures elektrikonstant on valemisse 11.10 lisatud selleks, et vastuvõtlikkus oleks ühikuta. Teatavasti võib elektrostaatiliste väljade põhiomadused kokku võtta kujule:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 ; \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0} , \quad (11.11)$$

mis peab jääma kehtima ka dielektrikutes, kui lisame Gaussi lauses juhtivuslaengute  $Q_c$  (*conduction*) summale  $\Sigma Q_c$  polarisatsioonilaengute summa  $\Sigma Q_p$  (*polarization*).

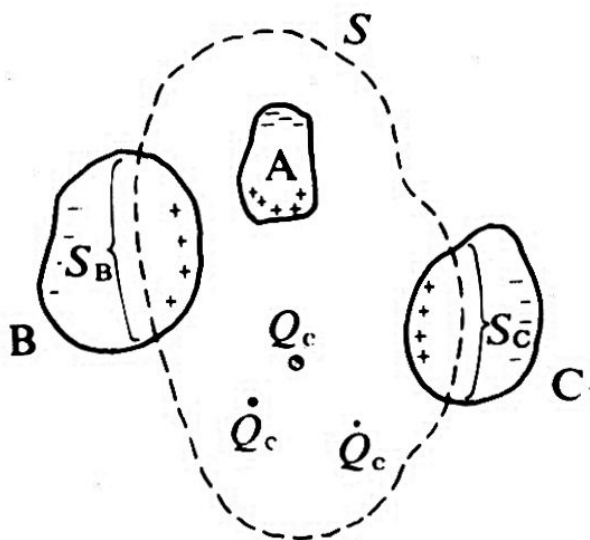
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q_c}{\epsilon_0} + \frac{\Sigma Q_p}{\epsilon_0} . \quad (11.12)$$

Joonisel on kujutatud olukorda, mil kolm negatiivset makrolaengut ehk juhtivuslaengut  $Q_c$  polariseerivad ära kolm dielektrikutükki A, B ja C. Võtame Gaussi pinna, mis kulgeb läbi tükide B ja C. Vastavaid Gaussi pinna osi  $S_B$  ja  $S_C$  läbivad polarisatsioonilaengud

$$\oint_{S_B} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{ja} \quad \oint_{S_C} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} .$$

Gaussi pinna ülejäänud osades  $\mathbf{P} = 0$ , seega summaarne pinna sisse jääv polarisatsioonilaeng on

$$-\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} .$$



See on positiivne laeng, kuna pinna sees on negatiivsed polariseerivad juhtivuslaengud, polarisatsioonivektor on joonisel suunatud Gaussi pinda sisse („miinuselt plussile“) ning skalaarkorrutis  $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$  on ülaltoodud valemis praegu negatiivne. Teisendame 11.12 kujule

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma Q_c - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} , \quad \text{millest} \quad \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \Sigma Q_c \quad (11.13)$$

Nüüd võime elektrinihke lugeda defineeritaks valemiga

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (11.14)$$

$$\text{ja Gaussi teoreem võtab kuju} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma Q_c \quad (11.15)$$

$$\text{ehk diferentsiaalselt} \quad \text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c . \quad (11.16)$$

Kui me nüüd asendame  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$  (11.10) valemisse 11.14, siis saame, et

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \quad (11.17)$$

$$\text{ehk} \quad \varepsilon = 1 + \chi_e, \quad (11.18) \quad \text{kuna} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \quad (11.19)$$

$$\text{Samas aga ka} \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}. \quad (11.20)$$

Dielektrilise läbitavuse definitsioon 11.1 kahe mahtuvuse suhtena annab kondensaatori plaatide vahel paikneva aine keskmise dielektrilise läbitavuse. Kuna polarisatsioonivektor on defineeritud ühes punktis, siis on seda ka vastuvõtlikkus ning valemi 11.18 kohaselt läbitavus. Niisiis on definitsioon 11.18 üldisem, määrates dielektrilise läbitavuse kindlas ruumi punktis.

Kui dielektrik on mittelineaarne, mitteisotroopne või mittehomogeenne (mitte-LIH), siis võtab valem  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$  (11.10) kuju

$$P_x = \varepsilon_0 \chi_{xx} E_x + \varepsilon_0 \chi_{xy} E_y + \varepsilon_0 \chi_{xz} E_z, \text{ analoogiliselt ka } P_y \text{ ja } P_z.$$

See tähendab, et vastuvõtlikkus  $\chi_e$  ning seega ka läbitavus  $\varepsilon$  on üldjuhul tensorid. Näiteks  $\chi_{xy}$  kirjeldab seda, kuidas  $y$ -telje suunaline elektriväli kutsub esile  $x$ -telje suunalise polarisatsiooni.

$$\text{Lähtudes võrrandist} \quad Q_p = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (11.7)$$

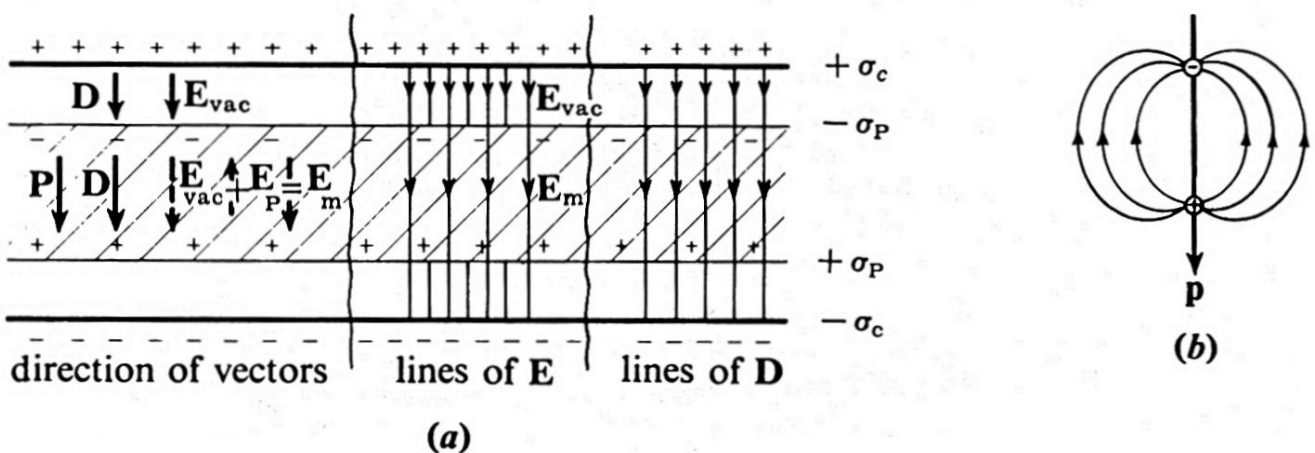
näitame nüüd, et LIH dielektrikus polarisatsioonilaengu ruumjaotust ei teki. Kasutades seost  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$  (11.9), võime väita, et  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/(\varepsilon_0 \varepsilon)$  ja seega  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = (\chi_e/\varepsilon) \mathbf{D}$  ning polariseeritud dielektriku sees võetud Gaussi pinna  $S$  jaoks kehtib

$$Q_p = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\chi_e}{\varepsilon} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

kui võime eeldada, et pinna sees pole juhtivuslaenguid. Seega saavad LIH dielektrikus eksisteerida vaid polarisatsiooni pinnalaengud pindtihedusega

$$\sigma_p = P_n = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_m, \quad (11.21)$$

kus  $E_m$  on elektrivälja tugevuse normaalkomponent aines pinna lähedal (*in the medium*). Nüüd mõistame, miks dielektriku olemasolu põhjustab väljatugevuse ja potentsiaali kahanemist. Joonisel allpool on kujutatud laetud kondensaatorit, mille katete vahele on paigutatud tasaparalleelne dielektriku plaat. On näha, kuidas alla-suunas orienteerunud dipoolid ( $\mathbf{b}$ ) tekitavad ka alla suunatud  $\mathbf{P}$ , kuid nende poolt tekitatud pinnalaengu ( $\sigma_p$ ) elektriväli on suunatud üles:



Kuna

$$-\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0} = -\frac{P_n}{\varepsilon_0} = -(\varepsilon - 1)E_m$$

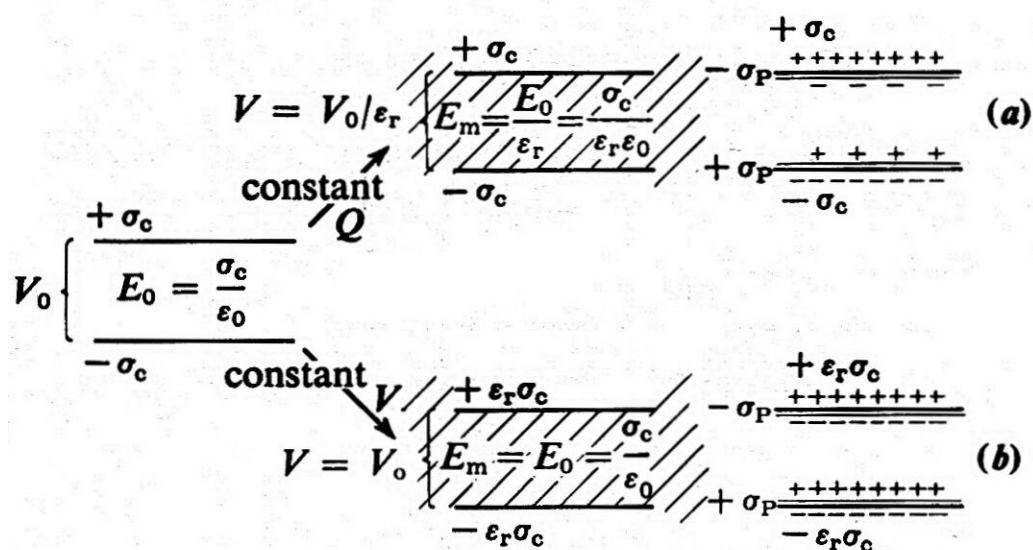
siis

$$E_m = E_{\text{vac}} + E_p = \frac{(\sigma_c - \sigma_p)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0} - (\varepsilon - 1)E_m = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0} - \varepsilon E_m + E_m,$$

millest tuleneb hästituntud valem

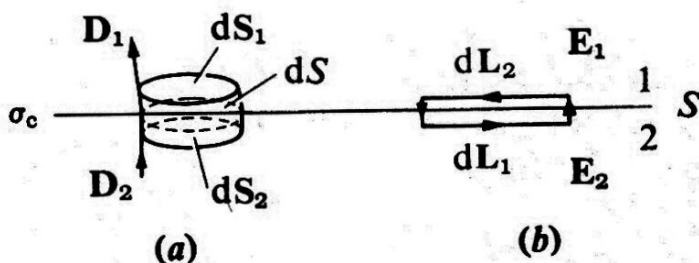
$$E_m = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Nüüd uurime, mis toimub kondensaatori plaatidevahelise ruumi täielikult täitmisel dielektrikuga konstantse laengu (*a*) ja konstantse pinge (*b*) korral:



Juhul (*a*) väli kondensaatori sees nõrgeneb  $E_p$  võrra ehk  $\varepsilon$  korda. Plaadi pinnaühiku kohta tuleb laeng  $\sigma_c - \sigma_p$ . Juhul (*b*) tuleb toiteallikast kondensaatori katete pinnaühikule täiendavalt laeng  $(\varepsilon - 1) \sigma_c$ . Nüüd on plaatide pinnaühikul laeng  $\sigma_c + (\varepsilon - 1) \sigma_c = \varepsilon \sigma_c$  ehk endisest  $\varepsilon$  korda suurem laeng.

#### 4. Rajatingimused **D** ja **E**-vektorite jaoks.



Sel Duffin'i õpikust pärineval joonisel on integreerimistee lõikude  $d\mathbf{L}_1$  ja  $d\mathbf{L}_2$  tähised omavahel ekslikult ära vahetatud.

Joonisel on kujutatud kahe keskkonna lahutuspinda, sõltumata sellest, kas tegemist on juhtide või dielektrikutega. Gaussi lausest **D**-vektori kohta (11.15) tuleneb, et joonisel (*a*) kogu voog läbi vaadeldava silindrilise pinna võrdub ülalt väljuva (positiivse) voo  $\mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}_1$  ja alt siseneva (negatiivse) voo  $-\mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}_2$  summaga, kui voog läbi silindri külgsinna on null. Kui leiame elektrinihke voost piirväärtuse silindri kõrguse piiramatul vähendamisel, siis  $d\mathbf{S}_1$  ja  $d\mathbf{S}_2 \rightarrow d\mathbf{S}$ .

Kui üks keskkondadest on juhtiv, siis paikneb tekkiva Gaussi pinna sees juhtivuslaeng  $\sigma_c dS$ . Seega

$$\mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 - \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot d\mathbf{S} = \sigma_c dS,$$

millest saame, et  $\mathbf{D}$ -vektori normaalkomponent peab üldjuhul olema katkev juhtivuslaengute pindtiheduse  $\sigma_c$  võrra:

$$D_{1n} - D_{2n} = \Delta D_n = \sigma_c \quad (11.22)$$

Kahe dielektriku lahutuspinnal juhtivuslaenguid ei ole, mistõttu seal  $\mathbf{D}$ -vektori normaalkomponent on pidev. Niisiis peab katkev olema hoopis  $\mathbf{E}$ -vektori normaalkomponent. Selles dielektrikus, mille dielektriline läbitavus on  $x$  korda suurem, peab  $\mathbf{E}$ -vektori normaalkomponent olema  $x$  korda lühem.

Kuna elektrostaatiline välja tugevuse joonintegraal piki kinnist joont on alati null (elektrostaatiline väli on konservatiivne ja potentsiaalne), siis joonisel (**b**) toodud kontuuri vertikaal-lõikude piiramatul lühendamisel saame

$$E_{1t} dL_1 - E_{2t} dL_2 = 0.$$

Lühidalt: kui lõigul  $dL_1$  potentsiaal langeb, siis lõigul  $dL_2$  peab ta samapalju tõusma, pinged neil lõikudel on integreerimissuuna seisukohalt vastandlike märkidega. Seega  $\mathbf{E}$ -vektori tangentsiaalkomponent on alati pidev:

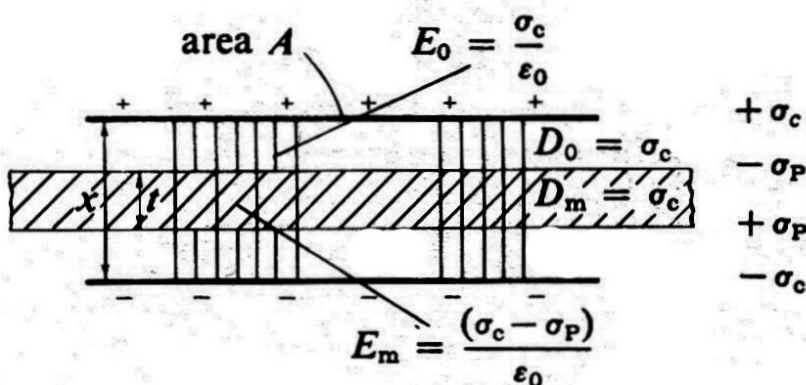
$$E_{1t} = E_{2t}; \quad \Delta E_t = 0 \quad (11.23)$$

Näide: katetega paralleelset dielektriku plaati sisaldav kondensaator plaatide vahekaugusega  $x$  on samaväärne kahe kondensaatori jadaühendusega, millest üks sisaldab dielektriku kihti paksusega  $t$  (*thickness*) ja teine vaakumit (või õhku), paksusega  $x - t$ . Liituvad mahtuvuste pöördväärtused:

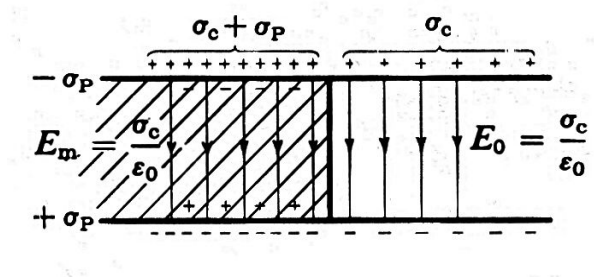
$$\frac{1}{C} = \frac{x-t}{\epsilon_0 S} + \frac{t}{\epsilon \epsilon_0 S} = \frac{\epsilon(x-t) + t}{\epsilon \epsilon_0 S}$$

Seega dielektriku plaadi lisamine on samaväärne katete vahekauguse vähendamisega vaakumis  $t(1 - 1/\epsilon)$  võrra:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{\epsilon x - \epsilon t + t} = \frac{\epsilon_0 S}{x - t \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)}.$$



Analoogiliselt on katete pindala mingis osas dielektrikuga täielikult täidetud kondensaator samaväärne kahe kondensaatori rööpühendusega. Liituvad mahtuvused ise:



##### 5. Elektrivälja energia dielektrikute olemasolu korral:

Diferentsiaalne töö  $dA$ , mida teeb välisjõud, viies laengu  $dq$  juba pingeni  $u$  laetud kondensaatori ühelt plaadilt teisele, avaldub pingi definitsiooni põhjal kujul:

$$dA = u dq. \quad (11.24)$$

Kogu töö kondensaatori laadimisel laenguni  $Q$  on seega

$$A = \int_0^Q u dq$$

ja kui kasutatavat dielektrikut võib lugeda lineaarseks ( $q = uC$ ), siis saame integreerimisel kondensaatorisse või irdjuhile salvestuva elektrivälja energia

$$E_{el} = A = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad (11.25)$$

kus  $Q$  on juhtivuslaeng. Irdjuhi korral tuleb kondensaatori plaatide vaheline pinge  $U$  asendada irdjuhi potentsiaaliga  $V$ . Nüüd vaatleme kolme juhtivuslaengut  $Q_1$ ,  $Q_2$  ja  $Q_3$  ning tähistame  $V_{12}$ -ga vaid laengust  $Q_2$  põhjustatud potentsiaali laengu  $Q_1$  asukohas. Analoogiliselt tähistame ka teisi samalaadseid potentsiaale. Kogu töö, mida tuleb teha punktlaengute  $Q_1$ ,  $Q_2$  ja  $Q_3$  vaadeldava konfiguratsiooni tekitamiseks, avaldub iga konkreetse laengu positsioneerimisel tehtavate tööde summana:

$$A = \frac{1}{2} Q_1(V_{12} + V_{13}) + \frac{1}{2} Q_2(V_{21} + V_{23}) + \frac{1}{2} Q_3(V_{31} + V_{32}) = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3$$

Seega mistahes laengute süsteemi korral kehtib

$$E_{el} = A = \sum_i \frac{1}{2} Q_i V_i. \quad (11.26)$$

Kui meil on tegemist LIH dielektrikus asuva juhi pinnaga, siis arvestades, et pinna osal pindalaga  $dS$  paikneb juhtivuslaeng  $dQ = D dS$ , võime pinna osast  $dS$  lähtuva elektrivälja energia esitada elektrinihke  $D$  ja välja potentsiaali  $\varphi$  kaudu (edaspidi tähistab  $V$  juba ruumala):

$$dE_{el} = \frac{1}{2} D dS \varphi, \quad \text{millest} \quad dE_{el} = \frac{1}{2} D dS \int_{S'}^{\infty} E dr = \int_{S'}^{\infty} \frac{1}{2} D E dS dr,$$

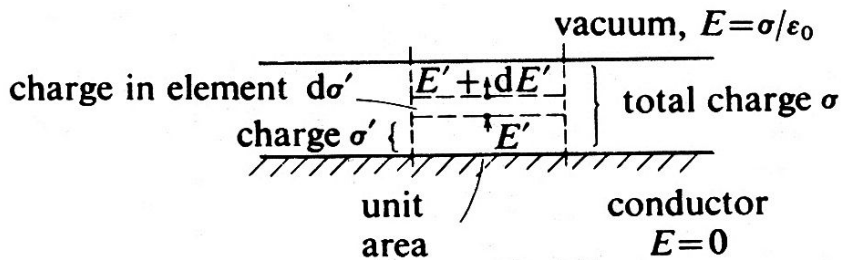
elektrivälja energia on esitatav energia ruumtiheduse integraalina üle ruumala

$$E_{el} = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 dV \quad (11.28)$$

ning diferentsiaalne töö, mida tehakse elektrinihke muutmiseks  $dD$  võrra, avaldub kujul

$$dA = \int_V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} dV. \quad (11.29)$$

Vaakumis mõjub laetud metallplaadi iga pinnaühiku kohta väljapoole suunatud jõud ehk teisisõnu – eksisteerib negatiivne rõhk. See on tingitud samamärgiliselt laetud kihtide (vt joonis allpool) omavahelisest tõukumisest.



Kõnealuse rõhu leidmiseks tuleb integreerida kõik diferentsiaalsed pinnaühikul mõjuvad jõud ehk rõhud  $dp = d\sigma' E'$ , millega pinnaühiku kohta tulevat laengut  $\sigma'$  sisaldav ja seega välja tugevusega  $E' = \sigma'/\varepsilon_0$  tekitav kiht tõukab tema peal paiknevat laengut  $d\sigma'$  sisaldavat diferentsiaalse paksusega kihti. Sisuliselt on seos

$$dp = d\sigma' E'$$

elektrivälja tugevuse definitsioonivalem  $dF = dq E$ , mis on pindalaga läbi jagatud.

Seose  $E = \sigma/\varepsilon_0$  põhjal saame, et  $d\sigma' = \varepsilon_0 dE'$

ja seega

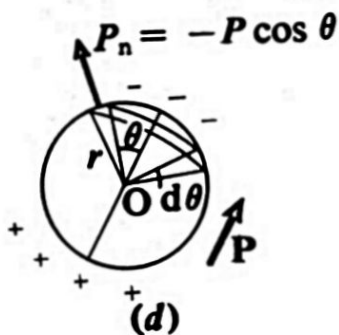
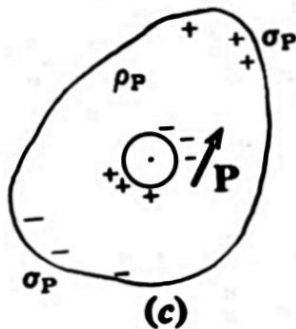
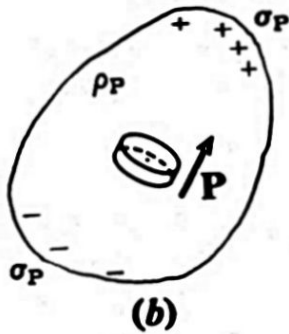
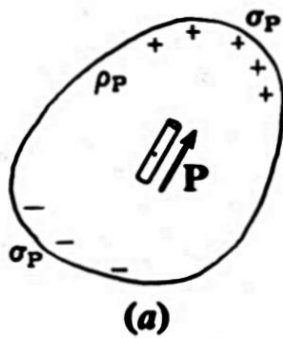
$$p = \int_0^E \varepsilon_0 E' dE' = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Kui metallplaat paikneb vedelas dielektrikus, siis see rõhk väheneb  $\varepsilon$  korda :

$$p = \frac{1}{2} DE = \frac{\sigma_c^2}{2\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (11.32)$$

## 6. Elektriväli õõnsustes dielektriku sees.

Jõud, mis mõjub proovilaengule õõnsuses dielektriku sees, sõltub õõnsuse kujust, kuna õõnsuse sisepinnal tekivad täiendavad polarisatsioonilaengud. Kui õõnsus on pikk ja peenike ning tema pikimõõde on paralleelne polarisatsioonivektoriga (variant **a** alumisel joonisel), siis on õõnsuse otstel tekkivad polarisatsioonilaengud tühiselt väikesed ning proovilaengule õõnsuses mõjuv jõud nõrgeneb  $\varepsilon$  korda võrreldes dielektriku puudumise juhuga. Seega kehtivad eespool pideva dielektriku jaoks saadud elektrivälja tugevuse valemid. Õõnsust nagu polekski.



Kui õõnsus on tableti (väga lühikese ja laia silindri) kujuline (variant *b*), siis tekivad silindri otsapindadel dielektrikus polarisatsioonilaengud pindtihedusega  $\pm\sigma_P$  (“+” vasakul all ja “-” paremal ülal, Duffini joonisel on nad kahjuks ära näitamata), kusjuures  $\sigma_P$  võrdub polarisatsioonivektori pikkusega. Nende laengute elektrivälja kompenseerib täielikult ära dielektrikutüki välispindadel tekkiva polarisatsioonilaengu mõju. Proovilaengule õõnsuses mõjuv jõud ei nõrgene praktiliselt üldse. Dielektrikut nagu polekski. Lokaalse elektrivälja tugevus avaldub kujul

$$\mathbf{E}_{lok} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0}. \quad (11.33.a)$$

Kui õõnsus on raadiust  $r$  omava sfääri kujuline (joonised *c* ja *d*), siis tekivad sfääri pindadel dielektrikus polarisatsioonilaengud pindtihedusega  $-P_n = -P \cos \theta$ . Nurga  $\theta$  diferentsiaalse muutusega  $d\theta$  kogu sfäärist välja lõigatava rõnga raadius on  $r \sin \theta$ , seega ümbermõõt  $2\pi r \sin \theta$  ja kuna rõnga laius on  $r d\theta$ , siis võrdub rõnga pindala korrutisega  $2\pi r \sin \theta r d\theta$ . Seega paikneb rõngal polarisatsioonilaeng

$$dQ_P = \sigma_P dS = -P \cos \theta 2\pi r \sin \theta r d\theta,$$

ning uuritav rõngas tekitab õõnsuse tsentris elektrivälja tugevusega

$$\frac{-dQ_P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P \cos^2 \theta \cdot 2\pi \cdot r^2 \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-P \cos^2 \theta \cdot d(\cos \theta)}{2\epsilon_0}$$

Seega kogu õõnsuse sisepind tekitab täiendava elektrivälja

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{-P \cos^2 \theta}{2\epsilon_0} d(\cos \theta) = \frac{P}{2\epsilon_0} \frac{\cos^3 0 - \cos^3 \pi}{3} = \frac{P}{2\epsilon_0} \frac{1+1}{3} = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

$$\text{ja ühtekokku} \quad \mathbf{E}_{lok} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (11.33.b)$$

## 7. Dielektriku mikroskoopiline käsitus.

Duffin defineerib molekuli **polariseeritavuse** (*polarizability*)  $\alpha$  kui keskmise dipoolmomendi, mille omandab molekul ühikulise tugevusega elektriväljas:

$$\alpha = \frac{p_e}{E}$$

Selle suuruse SI ühik on  $1 \text{ C} \cdot \text{m} / (\text{V/m}) = 1 \text{ F} \cdot \text{m}^2$  ehk **farad korda ruutmeeter**.

Täheldame erinevust EM põhimõistete skeemis toodud definitsioonist  $\alpha_V = \frac{p_e}{\epsilon_0 E}$ ,

milles on nimetajasse lisatud elektrikonstant, et mõõta polariseeritavust ruumala ühikutes, seega SI süsteemi korral **kuupmeetrites** ( $m^3$ ). Eristamaks kahte definitsiooni, kasutame ruumala ühikutes mõõdetava polariseeritavuse tähisena  $\alpha_V$ . Edaspidises arvestame, et  $\alpha = \alpha_V \epsilon_0$ . Esitame nüüd summaarse dipoolmomendi dipoolide arvu  $N$  ja keskmise dipoolmomendi  $\langle \mathbf{p}_e \rangle$  korrutisena, mille läbijagamisel vaadeldava ruumalaga  $\Delta V$  saame polarisatsioonivektori. Kui vaatleme ühte mooli ainet, siis on molekulide kui dipoolide arvuks Avogadro arv  $N_A$  (Duffinil  $N'_A$ ) ja ruumalaks ühe mooli ruumala kui molaarmassi  $M$  ja tiheduse  $\rho$  suhe. Ühe molekuli keskmise dipoolmomendi esitame kui polariseeritavuse  $\alpha$  ja lokaalse (molekuli asukohas eksisteeriva) elektrivälja tugevuse  $\mathbf{E}_{lok}$  korrutise. Eelistame siin lokaalse väljatugevuse tähisena  $\mathbf{E}_{lok}$  Duffini poolt kasutatavale tähisele  $\mathbf{E}_L$ , kuna  $\mathbf{E}_L$  tähistab õpikutes sageli ka nn. Lorentzi välja tugevust ehk suurust  $\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$  valemis 11.33.b. Ühtekokku saame seega

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_e}{\Delta V} = \frac{N}{\Delta V} \langle \mathbf{p}_e \rangle = \frac{N_A}{\frac{M}{\rho}} \alpha \mathbf{E}_{lok} = \frac{N_A \rho \alpha}{M} \mathbf{E}_{lok} \quad (11.34)$$

Kuna  $\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathbf{E}$  (valem 11.20), siis  $\epsilon - 1 = \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 \mathbf{E}}$  ja

$$\epsilon = 1 + \frac{N_A \rho \alpha}{\epsilon_0 M} \frac{\mathbf{E}_{lok}}{\mathbf{E}} \quad (11.35)$$

Lorentz näitas, et kui me võtame dielektrikus uuritava punkti ümber makroskoopiliselt väikese mõttelise sfäärilise pinna, siis sellest pinnast väljapoole jäävate polarisatsioonilaengute osalusel tekkiv lokaalne elektrivälja tugevus avaldub valemiga 11.33.b, aga samas on kuubilise kristallvõrega tahke dielektriku või siis ka vedela dielektriku korral sfääri sisse jäävate molekulide mõju tühiselt väike. Valem 11.33.b võtab kuju

$$\mathbf{E}_{lok} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathbf{E}}{3\epsilon_0} = \left( 1 + \frac{\epsilon - 1}{3} \right) \mathbf{E}$$

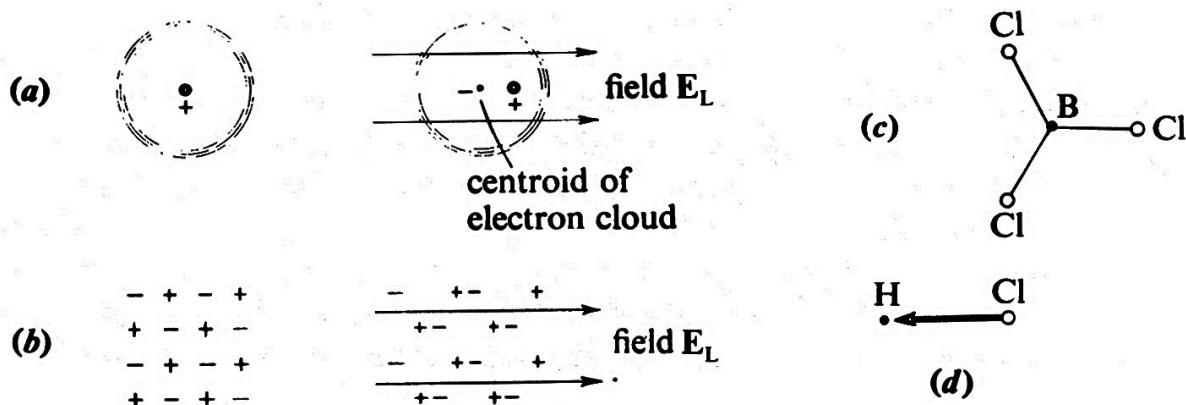
ja seega valem 11.35 läheb omakorda kujule  $\epsilon - 1 = \frac{N_A \rho \alpha}{\epsilon_0 M} \cdot \frac{3 + \epsilon - 1}{3} = \frac{N_A \rho \alpha}{\epsilon_0 M} \cdot \frac{\epsilon + 2}{3}$ ,

millest  $\alpha = \frac{3\epsilon_0 M}{N_A \rho} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$  või  $\alpha_V = \frac{3M}{N_A \rho} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \quad (11.36)$

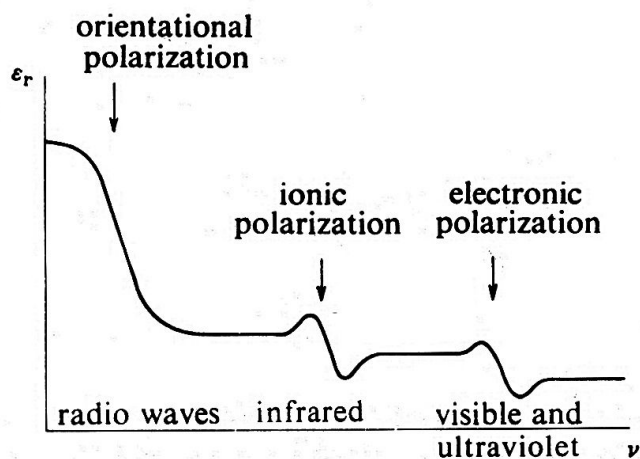
Seost 11.36 nimetatakse Clausius-Mossotti valemiks ning selle aluseks olevat eeldust valemi 11.33.b kehtivuse kohta Clausius-Mossotti lähenduseks. Sageli on see piisavalt hea lähendus aine molekuli polariseeritavuse arvutamiseks dielektrilise läbitavuse põhjal.

## 8. Polarisatsiooni nähtuse põhiliigid:

- a) **elektroonne** polarisatsioon (joonis *a* allpool) – elektrivälja puudumisel ühtib aatomi negatiivset laengut kandva elektronpilve kese aatomi positiivse laengu keskmega (tuumaga). Elektrivälja rakendumisel nihkub elektronpilve kese tuuma suhtes väljale vastassuunas (joonisel vasakule), mille tulemusena aatom on muutunud orienteerunud dipooliks. Selle dipoolmoment on suunatud paremale (välja suunas).



- b) **ioonne** polarisatsioon (joonis *b*) – elektrivälja puudumisel on vahekaugused positiivsete ja negatiivsete ionide vahel igal suunal ühesugused. Elektrivälja rakendumisel nihkuvad negatiivsed ioonid väljale vastassuunas (joonisel vasakule) ning positiivsed ioonid välja suunas (paremale), mille tulemusena ioonse kristalli ühel tahul (siin siis vasakpoolsel) tekib negatiivne polarisatsioonilaeng ning teisel tahul (parempoolsel) positiivne polarisatsioonilaeng. Polarisatsioonivektor on suunatud vasakult paremale (välja suunas).
- c) **orientatsiooniline** polarisatsioon esineb ainetes, mis sisaldavad juba olemuslikult dipoolina käituvaid **polaarseid** molekule. Elektrivälja puudumisel on nende molekulide dipoolmomentid paigutunud kaootiliselt (ilma eelissuunata). Elektrivälja rakendumisel dipoolid osaliselt orienteeruvad, st tekib keskmine nullist erinev orienteeriva elektrivälja suunaline dipoolmoment ja seega ka nullist erinev polarisatsioonivektor. Joonisel ülalpool on kujutatud  $\text{BCl}_3$  mittepolaarne molekul (*c*) ja  $\text{HCl}$  polaarne molekul (*d*).



Kui asume uurima aine dielektrilise läbitavuse sõltuvust ainele mõjuva vahelduva elektrivälja sagedusest ehk **dielektrilist funktsiooni**, siis registreerime erinevatele polarisatsiooni liikidele iseloomulikke resonantssagedusi. Sellel on ka rida praktilisi rakendusi. Näiteks vee molekulide orientatsioonilise polarisatsiooni resonantssagedusel (seal, kus dielektriline funktsioon kiiresti muutub), hakkab vett sisaldavas aines raadiolainete energia tugevasti neelduma (soojuseks muutuma). Seda kasutatakse **mikrolaineahjudes** (*microwave oven*).

Aine optiline **dispersioonikõver** (murdumisnäitaja sõltuvus lainepikkusest või sagedusest) formeerub ioonse ja elektroonse polarisatsiooni resonantside koosmõju tulemusena. Nähtavas valguses läbipaistev saabki olla vaid see aine, millel ioonsele polarisatsioonile vastav resonants paikneb infrapunases spektriosas (*infrared*) ning elektroonsele polarisatsioonile omane resonants EM lainete spektri ultravioletses osas (*ultraviolet*). Nende vahel, nähtavas spektriosas (*visible*) dielektriline läbitavus eriti ei muutu ja aine EM lainete energiat ei neela.

#### 9. Eriomadustega dielektrikud:

- a) **Ferroelektrikud** (*ferroelectrics*) on ained, milles elektrinihke **D** või polarisatsiooni-vektori **P** sõltuvus ainele rakendatava elektrivälja tugevusest **E** ei ole lineaarne vaid meenutab ferromagneetikute hüstereesisilmust (sellest ka nimetus). Ferroelektrikute dielektrilised läbitavused võivad omandada väga suuri väärtusi, näiteks baariumtitanaadil ( $\text{BaTiO}_3$ ) kuni 4000.
- b) **Elektreedid** (*electrets*) on sellised ferroelektrikud, mis on suutelised säilitama kord omandatud polarisatsiooniseisundit ka ilma polariseeriva elektriväljata. Seega neil on olemas mälu efekt. Elektreedid on kõvade ferromagneetikute dielektrilised analoogid. Neid kasutatakse mikrofonides.
- c) **Piesoelektrikud** (*piezoelectrics*) on ained, mis on suutelised polariseeruma mehaanilise pinge (surve või venituse) rakendamisel (nn piesoelektriline efekt). Tuntuim piesoelektrik on kvarts. Pieso-pöördefekt seisneb piesoelektriku tüki mõõtmete muutumises elektrilise pinge rakendamisel. Piesoefekt leiab laialdast kasutamist mikroskoopiliste andurite ja täiturite (*sensors and actuators*) valmistamisel, aga samuti ka aja mõõtmisel (kvartskell), väikeste ainekoguste massi mõõtmisel kvartsi kristalli omavõnkesageduse muutumise põhjal jne.
- d) **Püroelektrikud** (*pyroelectrics*) on ained, mis on suutelised polariseeruma temperatuuri muutumise tagajärjel. Püroelektrikuid kasutatakse termomeetrite valmistamiseks.