

Elektriahelate loengul 26.04.2017 näidatud katse: $\cos \varphi$ parandamine

Autotrafo abil saadud vahelduvpinge efektiivväärtusega $U = 159 \text{ V}$ sagedusel 50 Hz oli rakendatud skeemile, mis sisaldas jadaühenduses ampermeetrit, elektrimootorit ja lisainduktoori (induktiivsusega L_i). Mootorit vaatlesime koosnevana jadamisi ühendatud induktiivsest ja aktiivsest koormusest, kusjuures mootori mähise induktiivsus oli L_M ja aktiivtakistus $R_M' = 106 \Omega$ (mõõdetud oommeetriina töötava testriga). Mootori külge oli ühendatud vattmeeter, mis näitas nii pinget, voolutugevust kui ka mootoris eralduvat võimsust. Lisainduktoarina oli kasutusel raudsüdamikuga pool, mille (peamiselt rauaskadudest tingitud) aktiivtakistuse väärtuseks saadi varasematel mõõtmistel ca 140Ω . Lähtume sellest hinnangust ka allpool teostatavates arvutustes. Voltmeetreid ja ampermeetreid loeme ideaalseteks ($R_V \approx \infty$, $R_A \approx 0$).

Skeemi pingestamisel näitasid ampermeeter ja vattmeeter skeemi läbiva voolu tugevuseks $I_1 = 0,271 \text{ A}$, lisainduktooriga rööbiti ühendatud voltmeeter näitas pinget $U_{li1} = 47 \text{ V}$ ja mootoriga rööbiti ühendatud vattmeetri koostisesse kuuluv voltmeeter pinget $U_{M1} = 113 \text{ V}$. Mootor käis aeglaselt, seega temas eralduv võimsus oli väike. Tasub märkida, et $U_{li1} + U_{M1} = 160 \text{ V}$, mis on peaaegu võrdne toitepingega 159 V . Seega pinged mootoril U_{M1} ja lisainduktoiril U_{li1} olid omavahel peaaegu faasis, kuna osapingete summa võrdus kogupingega. Vattmeeter näitas mootoris eralduvat võimsust $P_1 = 17,4 \text{ W}$.

Kui nüüd mootoriga rööbiti ühendati kondensaator, mille korpuselt võis lugeda mahtuvust $C = 4 \mu\text{F}$, siis näitas toitevoolu ampermeeter voolutugevust $I_2 = 0,205 \text{ A}$, pinge lisainduktoiril oli $U_{li2} = 38 \text{ V}$ ja pinge mootori ja kondensaatori rööpühendusel $U_{M2} = 133 \text{ V}$. Mootor käis oluliselt kiiremini ja mootori võimsuse suurenemine ilmnis ka vattmeetri näidus $P_2 = 24,8 \text{ W}$. Vattmeeter näitas mootorit läbiva voolu tugevuseks $I_{M2} = 0,325 \text{ A}$, mis oluliselt ületab toitevoolu ($0,205 \text{ A}$).

Ülesanne: Leida mootori ja lisainduktoori induktiivsused. Leida mõlema juhu jaoks võimsustegur $\cos \varphi$ mootori ja ka ahela kui terviku jaoks.

Lahendus: Mootori kompleksne impedants: $\tilde{Z}_M = R_M + j\omega L_M$, kus L_M on mootori mähise induktiivsus. Esimesest mõõtmisest saame mootori impedantsi (kompleksse impedantsi mooduli) Z_M jaoks:

$$Z_{M1} = \frac{113 \text{ V}}{0,271 \text{ A}} = 417 \Omega.$$

Määrame nüüd vattmeetri andmete põhjal mootori näivvõimsuse S_M ja mootori võimsusteguri $\cos \varphi_M$. Esimesel mõõtmisel $S_{M1} = I_1 \cdot U_{M1} = 0,271 \text{ A} \cdot 113 \text{ V} = 30,6 \text{ VA}$.

Võimsuste kolmnurgast mootori võimsustegur: $\cos \varphi_{M1} = P_1 / S_{M1} = 17,4 \text{ W} / 30,6 \text{ VA} = 0,569$ ja $\varphi_{M1} = 55,3^\circ$. Takistuste kolmnurgast $\cos \varphi_{M1} = R_M / Z_{M1}$, millest omakorda $R_M = Z_{M1} \cos \varphi_{M1} = 417 \Omega \cdot 0,569 = 237 \Omega$.

Mootori näivvõimsus teisel mõõtmisel $S_{M2} = 0,325 \text{ A} \cdot 133 \text{ V} = 43,2 \text{ VA}$ ja $Z_{M2} = 133 \text{ V} / 0,325 \text{ A} = 409 \Omega$. Võimsuste kolmnurgast: $\cos \varphi_{M2} = P_2 / S_{M2} = 24,8 \text{ W} / 43,2 \text{ VA} = 0,574$ ja $\varphi_{M2} = 55,0^\circ$.

Takistuste kolmnurgast $R_M = Z_{M2} \cos \varphi_{M2} = 409 \Omega \cdot 0,571 = 233 \Omega$.

Erinevus kahe mõõtmise tulemustes kajastab peamiselt mõõtemääramatust. Mehaanilise tööga seotud osa tarbitavast võimsusest ja seda kajastav osa aktiivtakistuses võivad sõltuda mootori võlli pöörlemise kiirusest. Nagu näeme, on see sõltuvus nõrk, sest parandatud võimsusteguri korral (teine mõõtmine) osutus mootori aktiivtakistus koguni väiksemaks (233Ω) kui parandamata juhul (237Ω). Asume edaspidi kasutama mootori aktiivtakistusena kahe tulemuse keskmist väärtust $R_M = 235 \Omega$. Mootori aktiivtakistus koosneb vaseskadude-komponendist 106Ω ning rauaskadude ja mehaanilise võimsuse komponendist ca 130Ω .

Nüüd võime leida mootori reaktantsi $X_L = \omega L_M$ takistuste kolmnurgast:

esimese mõõtmise andmete põhjal $\omega L_{M1} = Z_{M1} \sin \varphi_{M1} = 417 \Omega \cdot 0,822 = 343 \Omega$

ning teise mõõtmise andmetest: $\omega L_{M2} = Z_{M2} \sin \varphi_{M2} = 409 \Omega \cdot 0,819 = 335 \Omega$.

Me võime mootori reaktantsi arvutada ka Pythagorase teoreemist:

$$\omega L_{M1} = \sqrt{Z_{M1}^2 - R_M^2} = \sqrt{417^2 - 237^2} = \sqrt{173889 - 56169} \approx 343 \Omega,$$

$$\omega L_{M2} = \sqrt{Z_{M2}^2 - R_M^2} = \sqrt{409^2 - 233^2} = \sqrt{167281 - 54289} \approx 336 \Omega.$$

Kahe tulemuse keskmine väärtus on ca 340Ω .

Kuna $f = 50 \text{ Hz}$, siis ringsagedus $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$ ja mootori induktiivsus $L_M = \frac{340 \Omega}{314 \text{ rad/s}} = 1,08 \text{ H}$.

Lisainduktori impedants esimese mõõtmise tulemustest: $Z_{li1} = 47,2 \text{ V} / 0,271 \text{ A} = 174 \Omega$ ja teise mõõtmise tulemuste põhjal $Z_{li2} = 38,0 \text{ V} / 0,205 \text{ A} = 185 \Omega$. Esimene mõõtmine on usaldusväärsem, kuna voolutugevus mootori ja lisainduktori jadaühendusel $0,271 \text{ A}$ on mõõdetud kaasaegse digitaalse vattmeetri abil. Teise mõõtmise korral on voolutugevus loetud vanema ja oluliselt ebatäpsema osutmõõteriista skaalalt. Lähtudes esimesest tulemusest leiame lisainduktori reaktantsi

$$\omega L_{li} = \sqrt{Z_{li}^2 - R_{li}^2} = \sqrt{174^2 - 140^2} = \sqrt{30276 - 19600} \approx 103 \Omega$$

ja selle põhjal lisainduktori induktiivsuse $L_{li} = \frac{103 \Omega}{314 \text{ rad/s}} = 0,33 \text{ H}$.

Ahela kui terviku impedants esimesel mõõtmisel $Z_1 = U_{toide} / I_1 = 159 \text{ V} / 0,271 \text{ A} = 587 \Omega$.

Ahela kui terviku faasinurk esimesel mõõtmisel, induktiivtakistuste põhjal

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\omega L_M + \omega L_{li}}{Z} = \arcsin \frac{340 \Omega + 103 \Omega}{587 \Omega} = \arcsin \frac{443}{587} \approx 49^\circ.$$

Aktiivtakistuste põhjal

$$\varphi_1 = \arccos \frac{R_M + R_{li}}{Z} = \arccos \frac{235 \Omega + 140 \Omega}{587 \Omega} = \arccos \frac{375}{587} \approx 50^\circ \text{ ja võimsustegur } \cos \varphi_1 \approx 0,64.$$

Eeldades kondensaatori mahtuvuse väärtust $C = 4 \mu\text{F}$, saame mahtuvustakistuse väärtuseks

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 4} = 796 \Omega.$$

Ülalpool arvatud kompleksse impedantsi põhjal leiame mootori kompleksse admittantsi:

$$\tilde{Y}_M = \frac{1}{235 + j340} = \frac{235 - j340}{235^2 + 340^2} = \frac{235 - j340}{170825} \Omega^{-1}.$$

Mootori ja kondensaatori rööpühenduse kompleksne impedants avaldub seega kujul:

$$\tilde{Z}_{MC(\text{rööp})} = \frac{1}{\frac{235 - j340}{170825} + j \frac{1}{796}} = \frac{1}{\frac{235 - j340 + j215}{170825}} = \frac{170825}{235 - j125} = \frac{170825(235 + j125)}{235^2 + 125^2} = \frac{170825}{70850}(235 + j125)$$

Lõplikult siis: $\tilde{Z}_{MC(\text{rööp})} = 2,411(235 + j125) \Omega = (567 + j301) \Omega$ ja ahela kui terviku impedants

$$\tilde{Z} = \underbrace{(567 + j301)}_{\text{mootor} + C} + 140 + j103 \Omega = (707 + j404) \Omega.$$

Nüüd faasinurk $\varphi_2 = \arctan \frac{404}{707} = \arctan 0,571 \approx 30^\circ$ ja seega võimsustegur $\cos \varphi_2 \approx 0,868$, mis tõesti

ületab varasemat väärtust (0,64) oluliselt. Ahelas tervikuna eralduv võimsus on

$P_2 = I_2 U \cos \varphi_2 = 0,205 \text{ A} \cdot 159 \text{ V} \cdot 0,868 = 28,3 \text{ W}$, millest mootoril eraldub $24,8 \text{ W}$.

Kontrolliks arvutame mootori ja kondensaatori rööpühenduse impedantsi mooduli

$Z_{MC} = |\tilde{Z}_{MC}| = \sqrt{567^2 + 301^2} = \sqrt{321489 + 90601} \approx 642 \Omega$, mis on heas kooskõlas rööpühenduse

impedantsi eksperimentaalse väärtusega $\frac{U_{M2}}{I_2} = \frac{133 \text{ V}}{0,205 \text{ A}} \approx 649 \Omega$.

Katse käigus eeldati vaikumisi toitepinge (159 V) konstantsust. Faasorite analüüs (vt [cos-fii-faasorid.pdf](#)) teise mõõtmise osas näitab, et see eeldus ei kehti. Kuna nurgad pingvektorite U_{li2} (efektiivväärtus 38 V), U_{M2} (133 V) ja toitepinge vektori vahel on väikesed (5-6 kraadi), siis on kõik kolm pinget peaaegu samas faasis (nii nagu esimesel mõõtmisel) ning toitepinge ei saa palju erineda summast $133 \text{ V} + 38 \text{ V} = 171 \text{ V}$. Täpsem analüüs näitab, et toitepinge teisel mõõtmisel $U_{toide} = 169 \text{ V}$.

Sellest väärtusest lähtudes saame ahela kui terviku impedantsiks $Z_2 = \frac{U_{toide}}{I_2} = \frac{169 \text{ V}}{0,205 \text{ A}} \approx 824 \Omega$, mis on

heas kooskõlas ülalpool leitud kompleksse koguimpedantsi $(707 + j404) \Omega$ mooduliga 814Ω . Toitepinge suurenemise põhjuseks on autotrafo kui pingejaguri koormusseisundi muutumine.