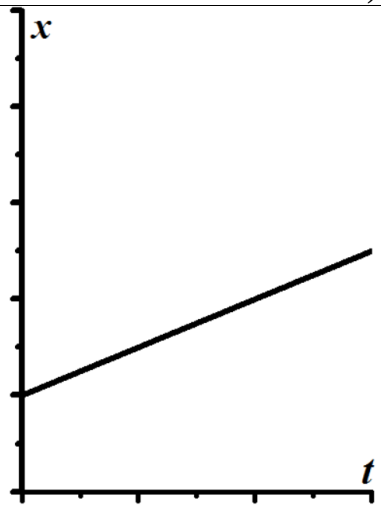
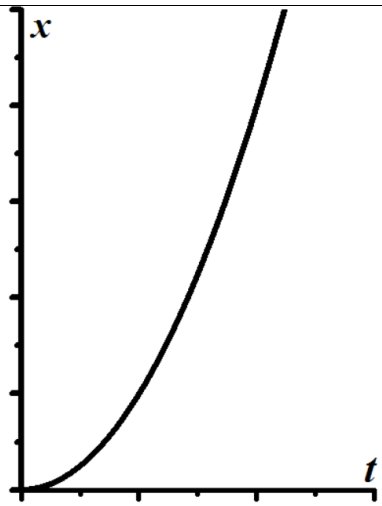
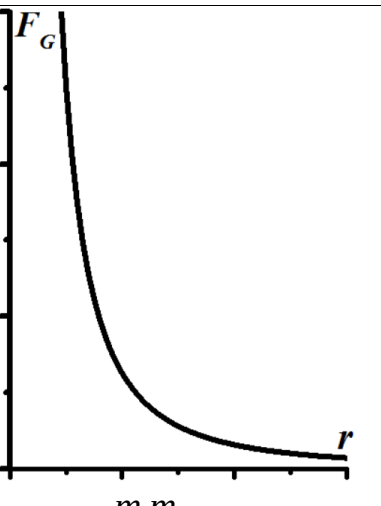
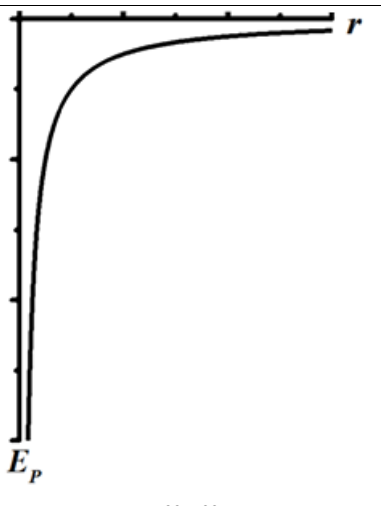


Peamised füüsikas esinevad funktsionaalsed sõltuvused

Astmefunktsioonid: matemaatiline üldkuju $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ..$				
Funktsiooni tüüp:	Lineaarfunktsioon	Ruutfunktsioon	Pöördruut-funktsioon	Pöördväärtus-funktsioon
Matemaatiline kuju	$y = ax + b$ (üldkujus $n = 1$)	$y = ax^2$ (üldkujus $n = 2$)	$y = ax^{-2} = \frac{a}{x^2}$ ($n = -2$)	$y = ax^{-1} = \frac{a}{x^1}$ ($n = -1$)
Näiteid füüsikast	a) <u>Liikumisvõrrand</u> ühtlasel liikumisel: $x = x_0 \pm vt$ (keha koordinaadi x sõltuvus ajast t); b) <u>Keha impulsi</u> p sõltuvus <u>kiirusest</u> v konstantse massi m korral: $p = m v$; c) <u>Ohmi seadus</u>: $I = \frac{U}{R}$ või $U = I R$ (pinge U sõltuvus takistusest R konstantse voolutugevuse I korral); d) <u>Kondensaator</u>: $q = C U$ (laengu q sõltuvus <u>pingest</u> U, võrdeteguriks on kondensaatori mahtuvus C).	a) <u>Läbitud teepikkus</u> ühtlaselt kiireneval või aeglustuval liikumisel: $s = \frac{at^2}{2}$ (eeldusel, et $x_0 = 0$ ja ka $v_0 = 0$); b) <u>Kineetilise energia</u> E_k sõltuvus keha <u>kiirusest</u> v: $E_k = \frac{mv^2}{2}$. c) <u>Elektrivälja energia</u> E_e sõltuvus pingest U kondensaatoril $E_e = \frac{CU^2}{2}$.	a) <u>Gravitatsiooniseadus</u> $F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, kus m_1 ja m_2 on vastastikmõjus olevate kehade massid ja r – kehade massikeskmete <u>vahekaugus</u>. b) Punktlengu q poolt tekitatav <u>elektrivälja tugevus</u> E kaugusel r sellest laengust: $E = k \frac{q}{r^2}$ k – Coulomb'i võrdetegur.	a) <u>Gravitatsioonijõu potentsiaalse energia</u> sõltuvus vastastikmõjus olevate kehade massikeskmete <u>vahekaugusest</u> r: $E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ G – gravitatsioonikonstant. b) Punktlengu q poolt tekitatav <u>potentsiaal</u> ϕ kaugusel r sellest laengust: $\phi = k \frac{q}{r}$ k – Coulomb'i võrdetegur.
Graafiline esitus	 $x = x_0 + vt$	 $x = at^2 / 2$	 $F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	 $E_{pot} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$

Funktsiooni tuletis - muutus ühikulises argumendi vahemikus ehk „muutumise hetkkiirus“		Lineaarfunktsiooni muutmise kiirus on <u>konstantne</u> : $v_t = \frac{d}{dt} x = \text{const}$ (näide a)		Üldjuhul on astmefunktsiooni muutmise kiirus algfunktsiooniga võrreldes <u>ühe võrra väiksema astmega funktsioon</u> , näiteks ruutfunktsiooni korral lineaarfunktsioon: $v_t = \frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt} \left(\frac{at^2}{2} \right) = \frac{a}{2} 2t = at$ (suurus at on kiirus hetkel t ehk lõppkiirus)
Funktsiooni tuletis või integraal	<u>Lineaarfunktsioon:</u> näide (b) ülalpool: $\frac{d}{dv} p = \frac{d}{dv} (mv) = m = \text{const.}$	<u>Ruutfunktsioon:</u> näide (a) Teepikkus = keskmine kiirus * aeg: $s = \frac{0 + at}{2} * t = \frac{at^2}{2}$ (*) (alkikiirus = 0, lõppkiirus $v = at$)	<u>Pöördruut:</u> näide (b) $\int_1^2 E dr = \int_1^2 k \frac{q}{r^2} dr = k \frac{q}{r_1} - k \frac{q}{r_2} = U_{12}$ Väljatugevuse integraal on kahe punkti potentsiaalide vahe ehk <u>pinge</u> .	<u>Pöördväärtus:</u> näide (b) $\frac{d}{dr} \varphi = \frac{d}{dr} \left(k \frac{q}{r} \right) = -k \frac{q}{r^2} = -E$. Potentsiaali tuletis = – väljatugevus (liikumisel välja suunas potentsiaal kahaneb, mitte ei kasva).
Looduse (või seda kirjeldava mudeli) omadus , mis tingib just niisuguse funktsionaalse sõltuvuse füüsikaliste suuruste vahel	<u>Lineaarfunktsioon:</u> Muutusi vaadeldakse niivõrd kitsas vahemikus, et kõrvalekalle lineaarsusest ei tule esile (mistahes funktsiooni graafiku piisavalt lühike tükk on vaadeldav sirglõiguna). Tegelikult on loodus alati mitte-lineaarne. Lineaarne saab olla vaid looduse mudel (inimlik välja-mõeldis looduse kohta).	<u>Teised astmefunktsioonid:</u> Muutusi vaadeldakse piisavalt laias vahemikus selleks, et mittelineaarsus tuleks esile. Funktsiooni graafik ei ole enam vaadeldav sirglõiguna.		
		<u>Ruutfunktsioon</u> tekib siis, kui muutmise kiirus osutub lineaarfunktsiooniks. Selle integraal on ruutfunktsioon. Valem (*) ülalpool on sisuliselt lineaarfunktsiooni $v = at$ <u>graafiline integreerimine</u> .	<u>Pöördruut-funktsioon</u> on välja jõukarakteristiku (jõu või väljatugevuse) sõltuvus <u>kaugusest</u> välja tekitava keha ja vaadeldava punkti vahel. Sisuliselt on see <u>geomeetriaseadus</u> – väide, et pindala on määratud joonmõõtmega ruuduga. Kui vaadeldava punkti kaugus välja punktallikast suureneb mingi arv korda, siis punktallikat ümbritseva mõttelise sfääri pindala suureneb see arv ruudus korda. Samapalju väheneb siis aga tõenäosus väljaosakese jõudmiseks välja allikast just sellesse konkreetse punkti. Lühidalt: väljatugevus (VT) = $\text{const} \frac{q \text{ (laeng)}}{S \text{ (pindala)}}$	<u>Negatiivse pöördväärtus-funktsiooniga</u> kirjeldub samalaadse (VT = const q/S tüüpi) välja energeetilise karakteristiku (jõukarakteristiku integraali) sõltuvus <u>kaugusest</u> välja tekitava keha ja vaadeldava punkti vahel. NB! VT = const q/S tüüpi välja tekkimise eelduseks on vastastikmõju vahendava osakese (väljaosakese) <u>lõpmatu eluiga</u> (see, et väljaosake iseenesest ei lagune).

EkspONENTfunktsioonid (EF): matemaatiline üldkuju $y = a e^{\pm bx} = a \exp(\pm bx)$

Aluseks on lihtsaim eksponentfunktsioon $e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, kus arvu n faktoriaal $n!$ on defineeritud kui n teguri korrutis: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-1) \cdot n$

Seega arv $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = 1 + 1 + 0,5 + 0,167 + 0,042 + 0,008 + \dots = \mathbf{2,7183..}$ Seejuures esimese 6 liikme summa on 2,717

Matemaatikas nimetatakse sellist summat **koonduvaks reaks**.

Veendume selles, et kui $x \ll 1$, siis kehtib väga hea täpsusega lähendusvalem $e^x \approx 1 + x$. Näiteks arvutamisel lähendusvalemiga $e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1} = 1,1$

Täpne väärtus $e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1} + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6} + \frac{0,0001}{24} + \dots = 1 + 0,1 + 0,005 + 0,000167 + 0,0000042 + 0,0000008 + \dots$

Näeme, et rea kolmas liige annab väärtusele 1,1 parandi 0,005 (ca 0,5 %), veelgi kõrgemad liikmed aga vähem kui 0,1 %.

Samas näiteks $e^3 = 1 + \frac{3^1}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6} + \frac{3^4}{24} + \frac{3^5}{120} + \dots = 1 + 3 + 4,5 + 4,5 + 3,375 + 2,025 + \dots = \text{kokku ca } 20$.

Näeme, et siin rea üldliige algul kasvab, aga siis hakkab kahanema – rida algul veidi **hajub**, aga lõpuks siiski **koondub** (tekib lõplik summa).

Hakkame sõna „eksponentfunktsioon“ asemel edaspidi kasutama lühendit **EF** ja e^x asemel lühendit $\exp x$ (siis ei pea kirjutama „väikeselt“ astendajat).

NB! On oluline mõista, et suurus a avaldises $y = a e^{\pm bx}$ on eksponentfunktsiooni **algordinaat**. Kui $x = 0$, siis $\exp x = 1$ ja $y = a$.

Tavaline (piiramatult kasvav) EF $y = a \exp(bx)$, kus bx saab palju suuremaks kui 1, vastab juhule, mil ressursse on lõputult. Seetõttu esineb funktsiooni $y = a \exp(bx)$ looduses vaid protsesside algul, mil protsessi toimumiseks vajalike ressursside lõppemist veel „ei paista“. Kuid üldiselt looduses ressursse lõputult ei ole. Seepärast esinevad sagedamini **kahanev EF**, **piirangule lähenev kasvav EF** ning **harmoonilised** (perioodilised) funktsioonid **$\sin x$** ja **$\cos x$** , mis on **kompleksarve** sisaldavad eksponentfunktsioonid.

Kui reaalarvudele vastavad sirge (reaaltelje) punktid, siis kompleksarvudele vastavad tasandi (komplekstasandi) punktid. **Kompleksarvud** sisaldavad imaginaarühikut $i = \sqrt{-1}$, mille füüsikaline tähendus on pööre täisnurga (90 kraadi või $\pi/2$ radiaani) võrra.

Meenutagem, et miinuskärg füüsika valemites tähendab suuna muutumist esialgsele vastupidiseks (pöoret 180 kraadi või π radiaani võrra).

Seetõttu korrutamine imaginaarühikuga tähendab suuna vastupidiseks muutmise protsessis **poolele teele pidama jäämist** – liikuma asumist **risti** sihiga, millel on valitud positiivne suund. Kui positiivseks on valitud suund paremale, siis korrutamine $+i$ -ga tähendab uut suunda üles (pöördenurk positiivne), korrutamine $-i$ -ga aga uut suunda alla (pöördenurk negatiivne).

Kahekordne samalaadne korrutamine tähendab välja jõudmist negatiivsele suunale, sest $i \cdot i = -1$ (pööre „ülalt“) või siis $(-i) \cdot (-i) = -1$ (pööre „alt“).

Kui kompleksarv on esitatud kujul $\tilde{A} = a + i b$, siis suurust a (kompleksarvule $\tilde{A}$ vastava punkti koordinaati reaalteljel) nimetatakse kompleksarvu $\tilde{A}$ **reaalosaks** ($\text{Re } \tilde{A}$), suurust b (uuritava punkti koordinaati imaginaarteljel) aga kompleksarvu $\tilde{A}$ **imaginaarosaks** ($\text{Im } \tilde{A}$).

Kompleksarvu võib esitada ka trigonomeetrilisel kujul $\tilde{A} = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi$, kus kompleksarvule $\tilde{A}$ vastava punkti kohavektori pikkust ρ nimetatakse kompleksarvu **mooduliks**, selle vektori asendit reaaltelje (positiivse suuna) suhtes määravat nurka φ aga kompleksarvu **argumendiks**.

Teatavasti on eksponentfunktsioon esitatav astmereana: $\exp x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

Samas on **siinus** (mis on teatavasti paaritu funktsioon) esitatav reana, mis koosneb eksponentfunktsiooni reaksarenduse **paaritute** liikmetest:

$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, kusjuures rea mistahes liikmel on naaberliikmete suhtes vastupidine märk.

Koosinuse kui paarisfunktsiooni reaksarendus sisaldab vastavalt aga $\exp x$ reaksarenduse **paarisliikmeid** ja liikmete märgid jällegi vahelduvad:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Nüüd aga selgub, et:

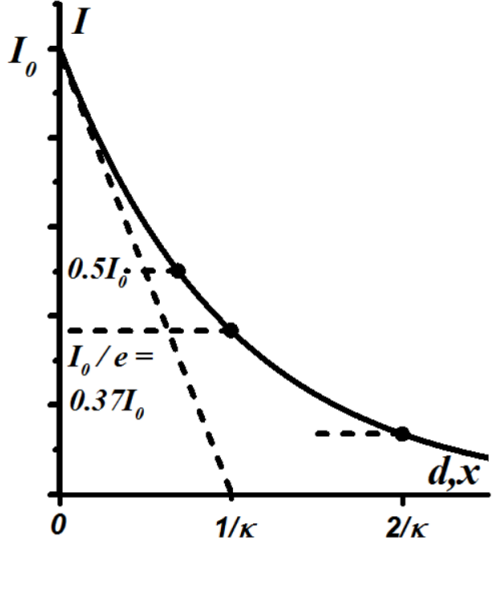
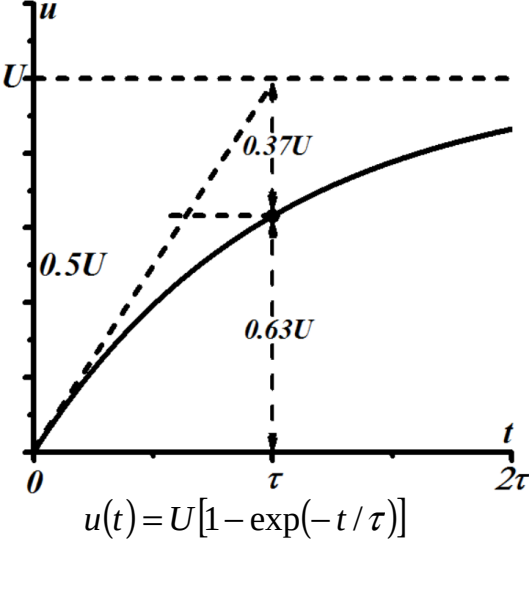
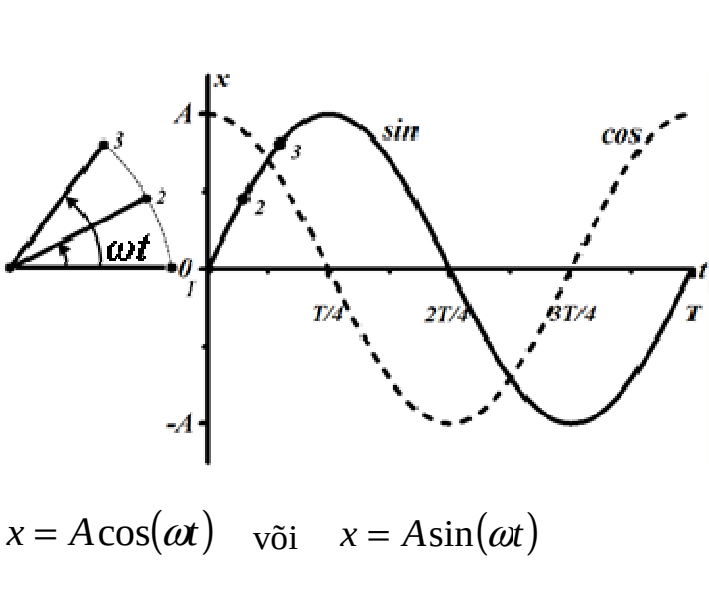
$$\exp(ix) = 1 + \frac{(ix)^1}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = 1 + i\frac{x^1}{1!} + i^2\frac{x^2}{2!} + i^3\frac{x^3}{3!} + i^4\frac{x^4}{4!} + i^5\frac{x^5}{5!} + \dots = 1 + i\frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots = \cos x + i \sin x.$$

Seega kehtib **Euleri valem** $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, mis võimaldab kompleksarvu trigonomeetriliselt kujult minna üle eksponentkujule:

$$\tilde{A} = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi = \rho \exp(i\varphi).$$

Vastavalt võib siinus- ja koosinusfunktsiooni esitada eksponentfunktsioonide kaudu (allpool paremal). Ehk siis siinus ja koosinus osutuvad samuti eksponentfunksioonideks.

Funktsiooni tüüp:		Kahanev eksponentfunktsioon	Piirangule lähenev kasvav EF	Siinusfunktsioon	Koosinusfunktsioon
Matemaatiline kuju		$y = A e^{-bx} = \frac{A}{e^{bx}}$	$y = A(1 - e^{-bx}) = A - \frac{A}{e^{bx}}$	$y = A \sin x = A \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$y = A \cos x = A \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
Näiteid füüsikast	a) <u>Amplituudi A kahanemine ajas sumbuval võnkumisel</u> $A(t) = A_0 \exp(-\beta t) = A_0 \exp(-t/\tau)$, kus: A_0 - amplituudi algväärtus, t - aeg, β - sumbetegur, τ - ajategur. b) <u>Radioaktiivse lagunemise seadus:</u> $N = N_0 \exp(-t/\tau)$, kus N - radioaktiivsete tuumade arv hetkel t, N_0 - radioaktiivsete tuumade esialgne arv, t - aeg, τ - ajategur. c) <u>Valguse neeldumisseadus:</u> $I = I_0 \exp(-\kappa x)$, kus I_0 on ainele langeva valguse intensiivsus, I - valguse intensiivsus sügavusel x (peale paksust d omava kihi läbimist), κ - neeldumistegur. d) <u>Õhu rõhu vähenemine atmosfääris:</u> $p(h) = p_0 \exp(-h/H)$, kus $p(h)$ on õhu rõhk kõrgusel h maapinnast, p_0 - rõhk maapinnal, H - see kõrgus, millel õhu rõhk on vähenenud arv e korda (ca 8 km).	a) <u>Kondensaatori pingel u sõltuvus ajast:</u> $u(t) = U [1 - \exp(-t/\tau)]$ kondensaatori laadimisel vooluallika abil, mille klemmipinge on U (või U_m) See ongi piirang. b) <u>Induktoris tekkiva voolu tugevuse i sõltuvus ajast:</u> $i(t) = I_m [1 - \exp(-t/\tau)]$ voolu tekitamisel ahelas takistusega R sellise vooluallika abil, mille klemmipinge on U. Voolu piirang $I_m = U/R$. <u>Ajategurid:</u> Juhul (a) $\tau = RC$, kus R on ahela takistus ja C - kondensaatori mahtuvus. Juhul (b) $\tau = L/R$, kus R on ahela takistus ja L - induktiivsus.	a) <u>Hälbe x sõltuvus ajast</u> harmoonilisel võnkumisel: $x(t) = A \sin \omega t$ või $x(t) = A \cos \omega t$. Võnkumise keha hälbe (asendi) mistahes ajahetkel määrab ajaga võrdeline nurk ωt, mida nimetatakse <u>faasiks</u>. Faasi muutumise kiirust näitab nurk- või ringsagedus ω, kusjuures $\omega = 2\pi/T$ (T on periood). Maksimaalset hälvet A nimetatakse <u>amplituudiks</u>. <u>Siinusfunktsiooniga</u> on tegemist siis, kui aja arvestus algab tasakaaluasendist ($x = 0$, kui $t = 0$). <u>Koosinusfunktsiooniga</u> on tegemist, kui aja arvestus algab maksimaalse hälbe asendist ($x = A$, kui $t = 0$). b) <u>Vahelduvvool:</u> $i(t) = I_m \sin \omega t$ või $i(t) = I_m \cos \omega t$, kus I_m on voolutugevuse hetkelise väärtuse i maksimaalne võimalik väärtus (amplituudväärtus). c) <u>Päeva (valge aja) pikkuse d aastaringne muutumine:</u> $d(t) = d_{kp} + \frac{d_{max} - d_{min}}{2} \sin \frac{2\pi t}{T}$, kus d_{kp} on päeva pikkus kevadisel pööripäeval, d_{max} ja d_{min} on aga vastavalt suurim (suvine) ja vähim (talvine) päeva pikkus. Suurus t on aeg, T aga uuritava protsessi periood (üks aasta).		

Graafi line esitus		 $u(t) = U[1 - \exp(-t/\tau)]$	 $x = A \cos(\omega t) \quad \text{või} \quad x = A \sin(\omega t)$
Funktsiooni tuletis ehk „muutumise hetkkiirus“.. $v_x = \frac{d}{dx} y$ või $v_t = \frac{d}{dt} y$	$v_t = \frac{d}{dt} A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{A_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ Tuletis kasvab, lähenedes altpoolt oma nullväärtusele kui piirangule. See kasv algab tuletise väärtusest $(-A_0/\tau)$. Negatiivse tuletise absoluutväärtus kahaneb eksponentsiaalselt, selle tulemuseks on tuletise kasv (näide a).	$v_t = \frac{d}{dt} \left[U - U e^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \frac{U}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ Tuletis kahaneb, lähenedes eksponentsiaalselt nullile. See kahanemine algab tuletise väärtusest (U/τ) (näide a).	$v_t = \frac{d}{dt} A \sin \omega t = \omega A \cos \omega t = \omega A \cos(-\omega t) = \omega A \sin[\pi/2 - (-\omega t)] = \omega A \sin(\omega t + \pi/2)$ Välisfunktsiooni tuletisega, milleks siinusfunktsiooni korral on koosinusfunktsioon, tuleb korrutada sisefunktsiooni tuletis. See on faasinurga ωt avaldises aja t ees seisev tegur ω ehk ringsagedus. Nii saame tuletise amplituudiks ωA, kui funktsiooni enda amplituud on A. Tuletis muutub nii <u>sin</u> kui <u>cos-funktsiooni</u> korral samalaadse (harmoonilise) seaduse järgi nagu funktsioon isegi, kuid omab funktsiooni endaga võrreldes faasinihet $+\pi/2$ radiaani. See tähendab, et kõik, mis toimub funktsiooniga, toimub ka tema muutumise hetkkiirusega, kuid veerand perioodi võrra varem (faasinihkele $\pi/2$ rad vastab ajaline nihe $T/4$). <u>Kiirus</u> (funktsiooni tuletis) on <u>funktsioonist endast veerand perioodi ees</u> ning „veab edasi“ funktsiooni muutumist.

Looduse (või seda kirjeldava mudeli) omadus, mis tingib just niisuguse funktsionaalse sõltuvuse füüsikaliste suuruste vahel.	Süsteemil on olemas tasakaaluasend ja süsteem liigub selle asendi poole suunatud jõu ehk taastava jõu toimet. Kuid seda liikumist takistava jõu toime <u>on võrreldav taastava jõu toimega</u>. Seetõttu <u>on muutused aeglased</u> ning süsteemi inertsus ei mõjuta oluliselt lõpptulemust. Süsteem läheneb tasakaaluasendile <u>asümptootiliselt</u> ja ei ületa tasakaaluasendit. <u>Võnkumisi ei teki</u>. NB! Eksponentfunktsiooni tekkeks peab uuritava suuruse (funktsiooni) muut olema võrdeline algkogusega (sellega, kui palju funktsioon veel üldse muutuda saab). <u>Muutuda saab ainult see, mis veel muutunud ei ole</u>. Näiteks radioaktiivselt laguneda saavad ainult need tuumad, mis veel lagunenud ei ole (<i>surra saavad ainult need, kes veel on elus</i>).	Süsteemil on olemas tasakaaluasend ja süsteem liigub selle asendi poole suunatud jõu ehk taastava jõu toimet. Seda liikumist takistava jõu toime <u>on taastava jõu omaga võrreldes tühine</u>. Seetõttu on <u>muutused kiired</u> ja süsteemi inertsus muutub oluliseks. Süsteem ei peatu tasakaaluasendis vaid jätkab inertsiga liikumist ning ületab tasakaaluasendi. Teisel pool tasakaaluasendit kõik kordub. <u>Süsteem võngub</u>. NB! Võnkumiste tekkimiseks peab süsteemi inertsuse parameetri (mehaanikas <u>massi</u> m, elektromagnetismis <u>induktiivsuse</u> L) ja takistava jõu parameetri (mehaanikas <u>liikumise takistusteguri</u> b, elektromagnetismis <u>takistuse</u> R) suhe olema <u>oluliselt suurem võnkumiste poolperioodist</u>. Ülalpool induktori näites (b) on selleks suhteks ahela ajategur $\tau = L/R$. Seega võnkumiste tekke tingimuseks on $\frac{L}{R} > \frac{T_0}{2}$.
	Üldjuhul leiavad looduses aset korraga mõlemad protsessid: nii amplituudi <u>eksponentsiaalne kahanemine</u> (kahanev eksponentfunktsioon, näide a) kui ka <u>võnkumine</u> (siinus- või koosinusfunktsioon). Seega sumbuval võnkumisel $x(t) = A_0 \exp(-t/\tau) \cos \omega t$.	